

Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

Karina Jaquelin Herrera-García (Escuela Normal Superior de Hermosillo. México)

María Teresa Dávila-Araiza (Universidad de Sonora. México)

Belén Giacomone (Universidad de la República de San Marino. Italia)

Pablo Beltrán-Pellicer (Universidad de Zaragoza. España)

Fecha de recepción: 27 de enero de 2021

Fecha de aceptación: 30 de junio de 2021

Resumen

La variación lineal constituye un objeto matemático complejo que involucra diferentes representaciones. Curricularmente, toma elementos propios de la aritmética y permite progresar y afianzar el pensamiento algebraico y funcional. Por lo tanto, es razonable que los diferentes programas de formación del profesorado consideren experiencias formativas que atiendan las diversas facetas de los conocimientos y competencias profesionales implicados en la variación lineal. En este trabajo presentamos algunas actividades de una propuesta didáctica que considera el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, a partir del contenido matemático, el diseño de tareas y el análisis de respuestas de estudiantes.

Palabras clave

Variación lineal, secuencia didáctica, GeoGebra, formación del profesorado de secundaria, conocimientos y competencias didáctico-matemáticos.

Title

A proposal for a didactic sequence on linear variation for the initial secondary school mathematics teachers education

Abstract

Linear variation constitutes a complex mathematical object involving different representations. At the curricular level, it takes elements of arithmetic and allows to progress and strengthen algebraic and functional thinking. Therefore, it is reasonable that different teacher education programs consider training programs to consider learning experiences that address the various facets of professional knowledge and competences involved in linear variation. In this paper we present some activities of a didactic proposal that considers the development of didactic-mathematical knowledge and competences, based on the mathematical content, the design of tasks and the analysis of student responses.

Keywords

Linear variation, didactic sequence, GeoGebra, secondary school teacher education, didactic-mathematical knowledge, and competencies.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

1. Introducción

Este documento aborda el diseño de una propuesta formativa para desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas de secundaria con respecto a la enseñanza de la variación lineal. El interés de este trabajo en tal contenido matemático radica en que es un tema central en el currículo de la educación básica. De esta manera, las orientaciones curriculares sugieren que las y los profesores traten este contenido con el alumnado desde quinto año de primaria y durante los distintos grados de la educación secundaria. Este tema se estudia, incluso, en los niveles educativos medio superior y superior, por lo que se vuelve importante y necesario abordar este contenido con futuros profesores de matemáticas.

Este trabajo considera que la comprensión de la variación es un proceso complejo, siendo esto algo que señalan diversos autores como Confrey y Smith (1995), Panorkou, Maloney y Confrey (2014) y Thompson y Carlson (2017). Es interesante destacar que, en algunos planes de estudio de la escuela secundaria, como en México, el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes no se formula explícitamente (Bojórquez, Castillo y Jiménez, 2016). Esto se identifica en enfoques parciales de la cuestión en los currículos de matemáticas sobre la enseñanza de las funciones en el nivel básico, enfatizando el estudio de la función como regla de correspondencia sin relacionarlo con la idea de variación. Los autores mencionados anteriormente, concluyen que el razonamiento covariacional no desempeña ningún papel en los actuales libros de texto de matemáticas de secundaria, es decir, que los textos de secundaria no están formulados desde un punto de vista variacional.

Este artículo se organiza en dos bloques: en el primero se presentan y describen las actividades diseñadas que buscan desarrollar conocimientos y competencias sobre variación lineal; en el segundo se presentan las consideraciones finales al abordar dichas propuestas de actividades destacando la importancia del diseño de applets en GeoGebra para la educación a distancia.

2. Variación lineal

La variación lineal es un contenido de una elevada complejidad (Huang y Li, 2017), dado que involucra la articulación de diferentes enfoques y significados. El tipo de situaciones problema en las que se aborda el estudio de la variación son aquellas en las que tienen lugar procesos de cambio en donde participan magnitudes variables y, al elegir dos de estas magnitudes, se debe determinar si estas covarían o no de manera lineal, es decir, si las variaciones correspondientes de las magnitudes elegidas son directamente proporcionales. Es por ello que en el estudio de la variación lineal convergen dos nociones centrales en matemáticas, y bastante complejas: la proporcionalidad y la función, que se pueden abordar desde distintas perspectivas, como dan cuenta de ello los trabajos de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) sobre significados pragmáticos de la proporcionalidad (significado aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional) y de Pino-Fan, Parra-Urrea, y Castro (2019) sobre los significados de la función.

La noción de variación lineal es un tema de entrada al estudio las funciones, particularmente de las gráficas cartesianas de las funciones, cuya interpretación en términos variacionales requiere de la articulación de la variación conjunta de dos magnitudes variables, una en cada eje de coordenadas. Jiménez-Rodríguez (2020) plantea que para comprender la variación conjunta de dos magnitudes variables se requiere del estudio previo del comportamiento variacional de una sola magnitud variable,

y es en la escuela secundaria donde debería realizarse este estudio de manera integral con el tratamiento de números y cantidades en la recta numérica; sin embargo, los planes de estudio no lo contemplan.

Atendiendo a los señalamientos de Jiménez-Rodríguez (2020), la secuencia didáctica parte del estudio de magnitudes variables en rectas numéricas, buscando destacar que cada magnitud varía de manera uniforme, aunque distinta, y con ello caracterizar la variación lineal a partir de la relación de proporcionalidad entre las variaciones correspondientes de cada magnitud variable. Las situaciones-problema que se describen en esta propuesta de actividades incluyen contextos cercanos a la escuela, a la vida cotidiana y a la práctica profesional del profesor. En ellas intervienen magnitudes que varían de manera conjunta, donde sus variaciones correspondientes son proporcionales y, en algunos casos, también se tiene una relación de proporcionalidad entre las magnitudes mismas. Es importante aclarar que no se restringe a situaciones donde ambas magnitudes crecen de manera lineal, que son típicas en los libros de texto, sino que también se extiende a situaciones donde una magnitud aumenta mientras que la otra disminuye, de manera que se fije la atención en que la variación de ambas magnitudes debe ser uniforme, lo que implica que las variaciones de ambas son proporcionales.

Por otro lado, solamente se consideraron magnitudes variables con valores positivos, debido a los contextos seleccionados, por lo cual es recomendable complementar el diseño con situaciones que pongan en juego magnitudes que también tomen valores negativos. Es importante resaltar que se incluyen en el diseño situaciones que no son de variación lineal, esto con la intención de que se identifiquen propiedades y procedimientos que permitan reflexionar y distinguir qué situaciones son de variación lineal y cuáles no. El objetivo de esto no es otro que el de evitar caer en la ilusión de linealidad (De Bock, Verschaffel y Janssens, 1998).

3. Conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas

El *enfoque Ontosemiótico* (EOS) es un sistema dinámico que integra y articula diversas aproximaciones teóricas que nacen en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, y que viene siendo desarrollado desde hace ya varias décadas por Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco, se ha puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo teórico que permita considerar cuáles son los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos que el profesor de matemáticas debería desarrollar en su formación inicial y continua.

Recientemente, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) han descrito el *Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* del profesor de matemáticas (modelo CCDM) en el cual, se considera que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y conocimientos especializados para la enseñanza. Estos últimos implican 5 tipos de conocimientos:

1. Conocimientos epistémicos sobre un contenido, es decir, conocer la diversidad de interconexión de significados, la variedad de situaciones-problemas posibles y los posibles lenguajes, conceptos, proposiciones, propiedades, procedimientos y argumentos implicados en tales situaciones.
2. Conocimientos cognitivos, es decir, ¿cómo aprende el alumno? ¿cómo progresa en su aprendizaje?
3. Conocimientos afectivos de los estudiantes con relación al proceso de estudio.
4. Conocimientos sobre las interacciones y los recursos.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

5. Conocimientos ecológicos, es decir, sobre aspectos curriculares, políticos, etc., que condicionan cualquier proceso de estudio.

Así, dentro del modelo CCDM, se considera que las dos competencias claves del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia general de análisis e intervención didáctica. Dicha competencia general, está compuesta de 5 sub-competencias que permiten al docente abordar los problemas propios de su profesión, es decir, diseñar, implementar y valorar secuencias de aprendizaje y reflexionar de forma argumentada sobre criterios para mejorar tales secuencias, todo esto, teniendo en cuenta las 5 facetas de conocimiento mencionadas anteriormente. Estas subcompetencias son las siguientes (Godino, Giacomone et al., 2017, pp. 98-102):

- Competencia de análisis de significados globales: el profesor debe ser capaz de delimitar tanto los distintos tipos de tareas que aporten distintos significados al tema de estudio, como también, las prácticas matemáticas que deben ponerse en juego para su resolución.
- Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas: el profesor debe ser capaz de identificar los objetos y procesos matemáticos involucrados en la resolución de tareas matemáticas escolares para comprender y gestionar los aprendizajes de los estudiantes, y también, para realizar el diseño de secuencias didácticas.
- Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas: el profesor debe conocer las diversas interacciones, personales y materiales que se pueden dar en un proceso de enseñanza, implementarlas y gestionarlas de forma competente en el diseño instruccional.
- Competencia de análisis normativo: el profesor debe conocer, comprender y valorar las normas que rigen los procesos educativos.
- Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica: el profesor debe ser capaz de aplicar criterios que le permitan valorar un proceso de estudio, identificar puntos débiles y emitir juicios razonados de mejoras.

El presente trabajo se orienta al desarrollo de las tres primeras sub-competencias.

4. Secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial del profesorado de matemáticas

El objetivo principal de este conjunto de actividades es promover distintos significados de la variación lineal, centrando el estudio en las variaciones de las magnitudes variables. Concretamente, se presentan cuatro actividades didácticas que se corresponden con el Plan de Estudios 2018 para instituciones formadoras de docentes de matemáticas de educación secundaria en México.

Cada una de las actividades se estructura en tres partes. La Parte I se dedica a la resolución de problemas matemáticos; es decir, al desarrollo de conocimientos y competencias matemáticos. La Parte II involucra tareas de desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, que se centran en identificar características propias de la variación lineal. Por último, la Parte III son tareas didácticas, que se orientan a desarrollar estrategias por parte de las y los futuros profesores para proponer clarificar conocimientos matemáticos de estudiantes hipotéticos de secundaria.

Las actividades que se describen a continuación cuentan con applets diseñados específicamente para promover características propias de la variación lineal. Se puede acceder a los applets mediante el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/mrfsp3tg>.

4.1. La edad canina

Se espera que los futuros docentes resuelvan tareas matemáticas que involucren contextos de variación lineal del tipo $y = mx + b$. Esta actividad es base para comenzar a caracterizar la variación lineal, pues en ella se trabajan diferentes elementos matemáticos ligados a la proporcionalidad (magnitudes variables y su representación en rectas numéricas, cálculo de variaciones, proporcionalidad, representación algebraica, representación gráfica, etc.).

4.1.1. Parte I. Resolución de problemas matemáticos

La situación problema que se plantea al inicio de la primera actividad es:

Los perros envejecen más rápido que los humanos, por ejemplo, un perro de seis años (edad del perro) ya se considera un perro adulto (edad biológica) por la madurez y el envejecimiento que ha alcanzado su cuerpo.

Una veterinaria crea la siguiente herramienta para calcular la edad aproximada de una mascota para lograr entender su comportamiento y nivel de madurez.

La veterinaria Mirna Smith afirma que la edad biológica de un perro de 1 año es la de un ser humano de 20 años, y que a partir de ese momento la edad biológica del perro aumenta 4 años por cada año que transcurre.

Es importante resaltar que la actividad precisa de algunas aclaraciones antes de trabajar con las tareas propuestas. Así, ‘edad del perro’ es el tiempo que ha transcurrido desde su nacimiento (números de años vividos) y ‘edad biológica’ es el envejecimiento real y progresivo del organismo del perro como referencia al envejecimiento del cuerpo de un ser humano.

La primera tarea pretende que emerjan conceptos que indiquen que los estudiantes identifican magnitudes variables tales como: edad del perro y edad biológica del perro, expresadas de manera escrita en las hojas de trabajo:

Tarea 1. En la situación planteada ¿qué magnitudes cambian conforme pasa el tiempo?

La segunda tarea pretende que emerjan características y proposiciones tales como: ‘la edad del perro aumenta de manera uniforme’, ‘la edad biológica del perro aumenta de cuatro en cuatro por cada año transcurrido’ a partir del uso de lenguaje gráfico como las rectas numéricas, las cuales tienen el objetivo de ayudar a identificar cómo varían cada una de las magnitudes involucradas:

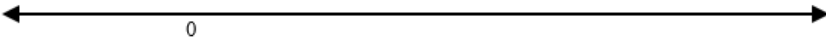
Tarea 2.

2.1. Representa en la siguiente recta numérica cómo cambia la edad del perro conforme pasan los años:



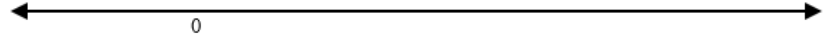
Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer



a. Describe cómo es el cambio de la edad del perro conforme pasan los años.

2.2. Representa en la siguiente recta numérica el cambio de la edad biológica del perro conforme pasan los años:



a. Describe cómo es el cambio de la edad biológica del perro conforme pasa el tiempo.

b. ¿Qué relaciones encuentras entre el cambio de ambas magnitudes (edad del perro y edad biológica)?

La tarea tres tiene el objetivo de que con el apoyo de la tecnología (GeoGebra) las y los futuros profesores identifiquen características de la variación lineal, como que los fenómenos estudiados involucran procesos de cambio a través del tiempo, y, por lo tanto, al estudiar las magnitudes involucradas es necesario reconocer que ellas están en constante cambio y, más aún, que las magnitudes estudiadas en esta situación problema varían de manera continua, no discreta. Con las preguntas planteadas se espera que emerjan proposiciones como: ‘las magnitudes (edad biológica-edad del perro) cambian conforme pasa el tiempo’; ‘Las magnitudes cambian de manera distinta’; ‘una magnitud cambia más rápido que la otra’; y respecto a la última pregunta, se espera que emerja la proposición: ‘ambas magnitudes cambian con el paso del tiempo de manera uniforme’:

Tarea 3. Ingresas al siguiente enlace <https://ggbm.at/ufgxxfxk> y responde:

a. Con el uso del applet ¿observaste algo distinto sobre el cambio de cada magnitud con respecto a la representación gráfica que realizaste? Si es así descríbelo.

b. ¿Qué relaciones encuentras entre la edad del perro y su edad biológica?

La cuarta tarea tiene el objetivo de poner en juego la necesidad de un lenguaje gráfico para representar la situación de variación lineal propuesta. Se espera que intervenga el lenguaje gráfico utilizado en la tarea uno, con el objetivo de que identifiquen cómo cambia cada magnitud. Posteriormente se promoverá la emergencia de la representación gráfica cartesiana de la relación de una magnitud con respecto a la otra.

Tarea 4. Crea una gráfica cartesiana donde representes la relación que encuentras entre ambas edades.

La tarea cinco tiene el propósito de que emerjan procedimientos tales como el cálculo de variaciones de una magnitud con respecto a la otra (edad del perro-edad biológica). Por

ejemplo: ellos tendrán que trabajar con variaciones de 1 en 1, en la edad del perro, hasta llegar a los 7 años y tienen que identificar que la edad biológica aumenta de 4 en 4. A partir de esos datos, tienen que obtener la edad biológica del perro cuando tiene 7 años. También se espera otra estrategia con base en la propiedad de proporcionalidad en las variaciones: a un perro de un año le corresponde la edad biológica de 20 años, a los 7 años, la variación del 1 al 7 es igual a 6, pero también debe calcular la variación en la edad biológica. Si pasaron 6 años, quiere decir que se tiene que multiplicar esos 6 años por 4, que es lo que varía la edad biológica cada año, siendo $6(4) = 24$ la variación en la edad biológica y por lo tanto a un perro de 7 años le corresponde una edad biológica de 44 años:

Tarea 5.

5.1. Según los datos proporcionados por la veterinaria:

- a. ¿Cuánto aumenta la edad biológica cada dos años?
- b. ¿Cuánto aumenta la edad biológica cada tres años?
- c. ¿Cuánto aumenta la edad biológica cada seis años?

5.2. Con los datos proporcionados por la veterinaria ¿podrías decidir cuánto aumenta la edad biológica del perro cada 7 años? Si es así, describe el procedimiento que empleaste.

5.3. Forma un equipo de tres personas y comparen las respuestas que proporcionaron en sus hojas de trabajo. Discutan y lleguen a un acuerdo sobre las relaciones que encuentran en la edad del perro y su edad biológica. Enlístalas enseguida:

5.4. ¿En las preguntas 5.2. y 5.3. usaron las mismas estrategias de solución?

Formulen en equipo una estrategia para discutirla grupalmente y explíquela en el siguiente espacio.

La tarea seis pretende que los estudiantes comparen variaciones entre ambas magnitudes a partir del llenado de la tabla y las preguntas planteadas. Se espera que a partir de la tabla emerja lenguaje simbólico-numérico y diagramático (arreglos entre las magnitudes y flechas para indicar la correspondencia y las variaciones en cada magnitud). La tarea del llenado de la tabla tiene como objetivo que los procedimientos que emergieron en la tarea cinco intervengan para poder llenar la tabla y que las y los futuros profesores identifiquen cómo varían las magnitudes conforme pasa el tiempo. Se espera que emerjan reflexiones sobre cómo varía la edad biológica cuando las variaciones en la edad del perro son distintas. Por ejemplo, cuando la edad del perro aumenta de uno en uno, las variaciones en la edad biológica serán de cuatro en cuatro; pero cuando la edad del perro varíe de dos en dos, las variaciones en la edad biológica serán de ocho en ocho. A partir de esas reflexiones se espera que emerja la propiedad de proporcionalidad en las variaciones de las magnitudes y se identifique la constante de proporcionalidad. Los estudiantes tienen que identificar que para calcular la edad biológica basta con obtener el producto de las variaciones por la constante cuatro, más veinte (edad biológica inicial en



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

comparación con la edad del perro). La última pregunta de la tarea seis tiene el objetivo de que emerja un lenguaje algebraico que represente la situación anterior.

Tarea 6.

6.1. En equipos de dos personas llenen la siguiente tabla con la información planteada por la veterinaria Mirtha Smith y encuentren una fórmula que les permita calcular la edad biológica del perro a partir de la edad que tiene.

Incrementos en la edad del perro	Edad del perro	Regla/procedimiento	Edad biológica del perro	Incrementos en la edad biológica del perro
			20	
			24	
	3			
			36	
	7			
			64	
			84	
	17 años y 6 meses			
	17 años y 8 meses			
	18 años y 6 meses			
			92	
	19 años y 6 meses			
	20 años			

Nota. En promedio el perro chihuahua vive de 14 a 15 años, pero en algunos casos puede alcanzar edades de 18 a 20 años: <https://www.clinicaveterinariaaasuncion.com/blog/cuantos-anos-vive-un-perro/>

6.2. ¿Encuentras relaciones de proporcionalidad en los datos de la tabla? Si es así, menciona en cuáles y cuál es la constante de proporcionalidad.

6.3. Explica los procedimientos que utilizaste para llenar las filas en donde la edad del perro se está dada en años y meses.

6.4. ¿Encontraste una expresión algebraica que funcione para todos los datos de la edad del perro y su edad biológica? Sí es así, descríbela.

En la tarea siete se proponen distintos métodos para calcular las edades biológicas de un perro, según su tamaño, con el propósito de que emerja, por un lado, la representación de una situación de variación lineal por medio del lenguaje algebraico y, por otro lado, que emerjan expresiones algebraicas del mismo tipo y se pueda estudiar cómo se relacionan con los datos de cada método con los elementos de la expresión algebraica. De tal forma que las y los futuros profesores reconozcan que en la expresión

algebraica de la forma $y = mx + b$ la variable x corresponde a la edad del perro, la variable y corresponde a la edad biológica y la ' m ' representa la razón de cambio de una magnitud con respecto a la otra.

Tarea 7. Otros veterinarios como Stanley Coren menciona que existen diversos factores que deben ser tomados en cuenta para calcular la edad de nuestras mascotas, como su tamaño y raza. El especialista calcula la edad biológica de los perros de la siguiente manera: En todos los perros el primer año de cachorro corresponde a los primeros 16 años de un ser humano. A partir de este momento por cada año que transcurre, las razas pequeñas envejecen 4 años, mientras que las razas medianas envejecen 6, y las grandes 7.

a. Determina una expresión algebraica que funcione para calcular la edad biológica de cada uno de los perros (raza pequeña, raza mediana y raza grande).

b. De los datos dados por el veterinario ¿cuáles aparecen directamente en la expresión algebraica que modela cada método? ¿Qué papel tienen en la expresión algebraica estos datos? Después de la discusión grupal puedes enriquecer tus respuestas utilizando pluma color azul.

4.1.2. Parte II. Tareas de desarrollo de competencias didáctico-matemáticas

Se presenta a continuación el análisis a priori de la reflexión didáctico-matemática, que tiene la intención de iniciar a las y los futuros profesores al desarrollo de la competencia de análisis didáctico, centrada en desarrollar competencias profesionales.

El objetivo de este apartado es reflexionar sobre la actividad *Edad canina* que acabas de realizar. Contesta de manera individual las siguientes preguntas en la columna de la izquierda. Llena la columna de la derecha después de la discusión grupal que se realizará.

a. ¿Qué es para ti un concepto-definición matemático? Enlista en columna de la izquierda los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la actividad.

Respuesta individual	Observaciones a partir de la discusión grupal

b. ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Enlista en columna de la izquierda los procedimientos matemáticos que te permitieron resolver la actividad.

Respuesta individual	Observaciones a partir de la discusión grupal

c. ¿Qué es para ti una propiedad matemática? ¿Qué propiedades matemáticas identificas en la actividad que acabas de realizar? Enlista en columna de la izquierda las propiedades matemáticas que te permitieron resolver la actividad.

Respuesta individual	Observaciones a partir de la discusión grupal



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

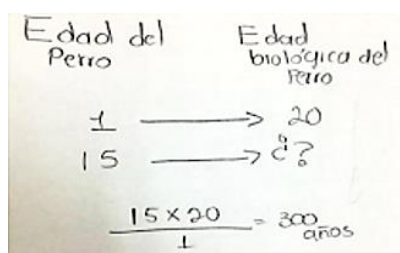
Se espera con estas tareas que las y los futuros profesores definan lo que son para ellos los objetos matemáticos primarios “concepto-definición, procedimiento y propiedad matemática”, con el fin de identificar si lo que ellos dicen que es ese objeto, efectivamente se relaciona con la forma en que lo identifican en la realización de sus tareas y en respuestas hipotéticas dadas por estudiantes de secundaria. Con esto se pretende que las y los futuros profesores inicien el desarrollo de la competencia de análisis didáctico, así como también se pretende tomar un punto de referencia sobre las ideas que tienen respecto a los objetos matemáticos primarios (concepto-definición, procedimiento y propiedades-proposiciones), para discutir y llegar a un acuerdo sobre lo que son y poder usar este significado en las actividades siguientes. El tipo de preguntas propuestas en esta tarea, las cuales fueron tomadas del trabajo de Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2018) permiten una exploración de significados personales sobre los distintos objetos matemáticos.

La tarea pretende identificar si las y los futuros profesores reconocen objetos matemáticos intervinientes y emergentes trabajados anteriormente en las actividades. Además, “la discusión grupal lleva a la reflexión sobre las distintas formas de concebir los conceptos, proposiciones, propiedades y procedimientos y el rol que ocupan en la actividad matemática” (Giacomone et al., 2018, pp. 1117), como también la reflexión del conocimiento matemático implicado en este tema y en las prácticas matemáticas resolutivas de la tarea propuesta.

4.1.3. Parte III. Tareas didáctico-matemáticas

La tarea didáctico-matemática que se presenta a continuación, tiene la intención de que los y los futuros profesores analicen una respuesta hipotética dada por un estudiante de secundaria. El objetivo es que se produzcan argumentos sobre por qué el procedimiento “regla de tres simple” no aplica al tratarse de una relación entre magnitudes representada con una expresión del tipo $y = mx + b$. Se trata de poner en juego significados de la función como relación entre magnitudes variables (Parra-Urrea, 2015) y el significado proto-algebraico de la proporcionalidad (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017).

Un estudiante de secundaria calculó la edad biológica de un perro de 15 años utilizando el método de la veterinaria Mirtha Smith como se muestra en la imagen:



a. ¿Consideras que el procedimiento es correcto? Argumenta tu respuesta.

b. ¿Qué retroalimentación darías al estudiante?

Esta tarea pretende que el futuro profesor reflexione sobre cómo pueden entender las reglas matemáticas sus estudiantes y busque alguna estrategia que podría ayudar a orientarlos cuando las respuestas no sean las esperadas. Se espera que las estrategias que el futuro profesor sugiera para orientar a su estudiante se relacionen con la parte matemática que ellos ya han trabajado en el diseño de la actividad uno (Parte I).

4.2. El peso y la estatura

Se espera que las y los futuros profesores resuelvan tareas matemáticas que promuevan la emergencia de objetos matemáticos de situaciones de variación lineal del tipo: $y = mx + b$ y situaciones que no lo son. En esta actividad se promueve el estudio de la pendiente de una recta y su relación con la constante de proporcionalidad en una relación entre magnitudes variables. Se trabaja dentro de un applet de GeoGebra que ayudará a distinguir representaciones gráficas en el plano cartesiano y representaciones tabulares de la variación lineal.

4.2.1. Parte I. Resolución de problemas matemáticos

La tarea uno está destinada a realizarse en grupos pequeños. En esta tarea se pretende que emerja la relación y regla de correspondencia entre dos magnitudes variables (peso-estatura). Se espera que intervenga el uso de procedimientos que permita calcular el peso de una persona según su estatura, obteniendo la fórmula peso = estatura (en cm) - 100. Posteriormente, se realizará una discusión grupal de los distintos métodos que puedan surgir.

Tarea 1. En equipo contesta la siguiente pregunta:

¿Conoces algún método para calcular el peso de una persona según su estatura? Describe cuál es.

En la tarea dos se espera que intervengan relaciones de correspondencia entre el peso y la estatura e intervengan procedimientos como el cálculo de variaciones de cada magnitud para establecer una relación de proporcionalidad entre tales variaciones y determinar el valor de la constante de proporcionalidad. También se espera que se identifique que no existe una relación de proporcionalidad entre las magnitudes variables peso y estatura.

Tarea 2. En equipo contesta las siguientes preguntas:

- Según este método, ¿cuánto pesa una persona si mide 144cm?
- Si una persona mide 204cm, ¿cuánto pesará?
- Si hay un incremento de 20cm en la estatura, ¿cuánto varía el peso?
- Y si la variación fuera de 22.5cm, ¿cuánto variará el peso?
- ¿Cuánto varía el peso (kg) por cada 1cm que aumenta la estatura?
- ¿Hay proporcionalidad directa entre el peso y la estatura?
- ¿Hay proporcionalidad directa entre los incrementos del peso y los incrementos de la estatura? Si es así, realiza aquí el procedimiento para calcular la constante de proporcionalidad.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

En la tarea tres se presenta un applet diseñado en GeoGebra, donde se visualiza de manera dinámica una recta numérica para cada una de las magnitudes, el peso y la estatura. En cada recta, se activa el movimiento de un punto sobre ella que se desplaza según el avance del tiempo, el cual representa una de las magnitudes (el peso o la estatura). Se espera que las y los futuros profesores describan el cambio de cada una de las magnitudes por medio de respuestas en lenguaje natural, como ‘cambian igual’ y posteriormente, después de un momento de institucionalización, como ‘cambian uniformemente’.

Tarea 3. Ingresar al siguiente enlace y contesta lo que se pide: <https://ggbm.at/vuq8t2un>

- a. ¿Cómo cambia la estatura?
- b. ¿Cómo cambia el peso?

La tarea cuatro está destinada a realizarse en el portal de GeoGebra. Se presenta un applet donde las y los futuros profesores deben llenar una tabla, calculando el peso correspondiente a distintos valores de la estatura, así como las variaciones de cada magnitud, y posteriormente graficar los datos en el plano cartesiano (ingresar al enlace <https://ggbm.at/vuq8t2un>).

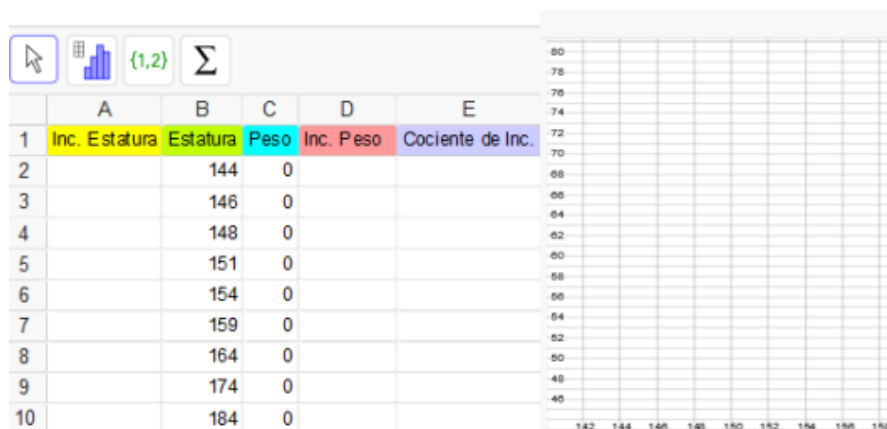
En el desarrollo de esta tarea se espera que intervengan procedimientos como el cálculo de la pendiente de la recta y el cálculo de la constante de proporcionalidad en los incrementos de las magnitudes. Por otro lado, se espera que emerjan argumentos relacionados a los procedimientos que intervienen en el desarrollo de este apartado.

El objetivo es que, a partir del lenguaje tabular y procedimiento de graficación de datos por punteo en el plano cartesiano, identifiquen la recta como representación gráfica cartesiana de la variación lineal, a partir del reconocimiento de la proporcionalidad entre las variaciones del peso y la estatura. La tarea tiene la intención de que las y los futuros profesores argumenten si se trata de una situación de variación lineal, utilizando la propiedad de que las variaciones de las magnitudes, estatura y peso son proporcionales, además que intervenga el concepto constante de proporcionalidad.

Respecto a las tareas de calcular la pendiente de la recta, el objetivo es la emergencia de la propiedad de que en una recta de variación lineal la pendiente siempre es la misma. Se espera que intervenga el procedimiento cálculo de pendientes mediante la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para identificar que esta propiedad se cumple.

Tarea 4.

4.1. A partir del método que conoces para calcular el peso de una persona según su estatura, llena la siguiente tabla y grafica los datos en el plano cartesiano que se te proporciona:



4.2. Cálculo de pendientes

- Calcula la pendiente de la recta con los puntos (144, 44) y (164, 64).
- Calcula la pendiente con los puntos (144, 44) y (146.5, 46.5).
- ¿Cómo es la pendiente de la recta con los puntos que calculaste?
- ¿Qué relación encuentras entre la pendiente de la recta y la constante de proporcionalidad en los incrementos del peso y los incrementos de la estatura?
- ¿Esta situación es un caso de variación lineal? Argumenta tu respuesta.

Posteriormente se presenta una tabla del Instituto Mexicano de Seguro Social (IMSS) con datos de peso, estatura e índice de masa corporal de personas adultas, sin importar su género (hombre-mujer). Esta tabla solamente será utilizada para llenar la tabla de datos que se presenta en la tarea 5.

La tarea cinco tiene el propósito de que emerjan procedimientos que permitan generar valores del peso según la estatura y llenar la tabla con esos datos. Se pretende que las y los futuros profesores llenen las tablas con los datos obtenidos a partir de los datos que el IMSS propone.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

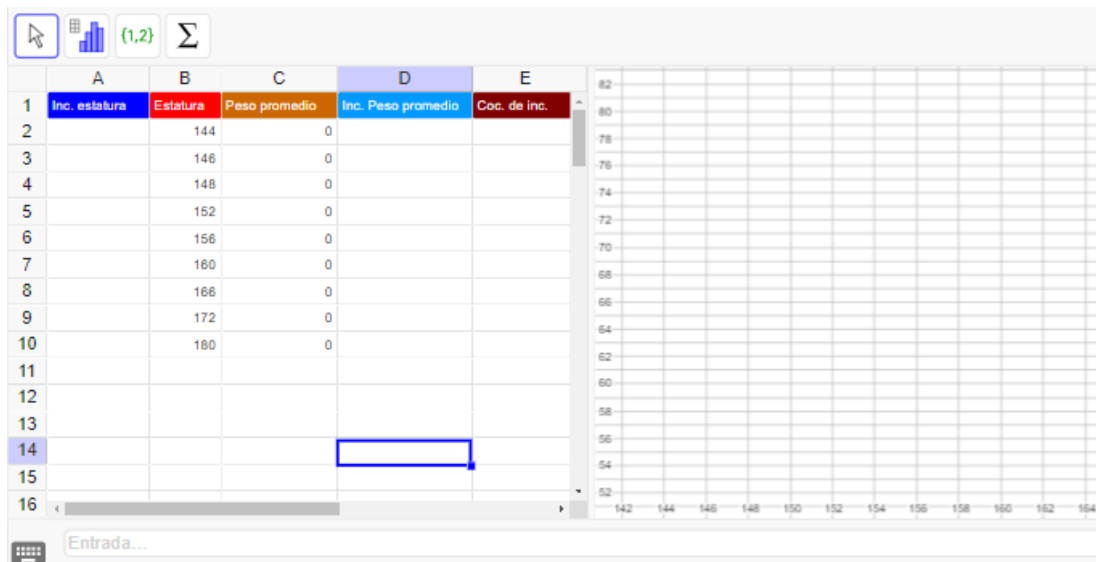
K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

Se presenta la tabla propuesta por el Instituto Mexicano de Seguro Social (IMSS) donde se establece el peso mínimo y peso máximo (kg) según la estatura de los adolescentes.

Para la naturaleza de este trabajo centraremos la atención en la columna ‘Peso Normal’, ‘Peso mínimo’ y ‘Peso máximo’.

PESO	ÍNDICE DE MASA CORPORAL								
	NORMAL		SOBREPESO		GRADOS DE OBESIDAD				
	18.5	24.9	25	29.9	30	34.9	35	39.9	≥ 40
Estatura	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Igual o mayor de:
1.44	38.4	51.6	51.8	62.0	62.2	72.4	72.6	82.7	82.9
1.46	39.4	53.0	53.3	63.7	63.9	74.4	74.6	85.1	85.3
1.48	40.5	54.5	54.8	65.5	65.7	76.4	76.7	87.4	87.6
1.50	41.6	56.0	56.3	67.3	67.5	78.5	78.8	89.8	90.0
1.52	42.7	57.5	57.8	69.1	69.3	80.6	80.9	92.2	92.4
1.54	43.9	59.1	59.3	70.9	71.1	82.8	83.0	94.6	94.9
1.56	45.0	60.6	60.8	72.8	73.0	84.9	85.2	97.1	97.3
1.58	46.2	62.2	62.4	74.6	74.9	87.1	87.4	99.6	99.9
1.60	47.4	63.7	64.0	76.5	76.8	89.3	89.6	102.1	102.4
1.62	48.6	65.3	65.6	78.5	78.7	91.6	91.9	104.7	105.0
1.64	49.8	67.0	67.2	80.4	80.7	93.9	94.1	107.3	107.6
1.66	51.0	68.6	68.9	82.4	82.7	96.2	96.4	109.9	110.2
1.68	52.2	70.3	70.6	84.4	84.7	98.5	98.8	112.6	112.9
1.70	53.5	72.0	72.3	86.4	86.7	100.9	101.2	115.3	115.6
1.72	54.7	73.7	74.0	88.5	88.8	103.2	103.5	118.0	118.3
1.74	56.0	75.4	75.7	90.5	90.8	105.7	106.0	120.8	121.1
1.76	57.3	77.1	77.4	92.6	92.9	108.1	108.4	123.6	123.9
1.78	58.6	78.9	79.2	94.7	95.1	110.6	110.9	126.4	126.7
1.80	59.9	80.7	81.0	96.9	97.2	113.1	113.4	129.3	129.6
1.82	61.3	82.5	82.8	99.0	99.4	115.6	115.9	132.2	132.5
1.84	62.6	84.3	84.6	101.2	101.6	118.2	118.5	135.1	135.4

Tarea 5. Ingresas al siguiente enlace <https://ggbm.at/vuq8t2un> y calcula el peso promedio de un adolescente según su estatura. Llena los valores de la tabla y grafica los puntos en el plano cartesiano.



a. Una vez graficados los puntos: ¿qué observas?

Las preguntas de la tarea seis tienen el objetivo de que las y los futuros profesores distingan que, a pesar de que la representación gráfica cartesiana formada a partir del método del IMSS parece una línea recta, se pretende que comparen el crecimiento entre ambas magnitudes, y que emerja la proposición de que no existe proporcionalidad directa entre los incrementos, por lo tanto, que distingan que esta situación no corresponde a una situación de variación lineal.

Tarea 6. Contesta las siguientes preguntas:

- Si un adolescente mide 144cm, ¿cuál es su peso promedio?
- Si el adolescente incrementa 2cm más en su estatura, ¿cuánto aumentará su peso promedio?
- Si un adolescente incrementa 8cm de estatura, ¿cuánto aumenta su peso promedio?
- ¿Hay proporcionalidad directa entre el peso promedio y la estatura?
- ¿Son directamente proporcionales los incrementos del peso promedio y los incrementos de la estatura?

Con el desarrollo de la tarea siete se espera que intervenga el procedimiento del cálculo de la pendiente y también se espera que emerja la propiedad de que la pendiente no es la misma para esta situación.

Tarea 7. Calcula las siguientes pendientes.

- Escoge dos pares de puntos con datos de la tabla del IMSS y calcula la pendiente para cada par.
- ¿Cómo es la pendiente con los puntos que elegiste?

La tarea ocho, está destinada a trabajar las diferencias entre el método propuesto por las y los futuros profesores, así como también por el propuesto por el IMSS. Esto con el objetivo de trabajar situaciones de variación lineal y distinguir cuando una situación no lo es, además de centrar la atención en los procedimientos utilizados que la distinguen de casos en los que no existe una variación lineal, y sus lenguajes, como las representaciones gráficas cartesianas. Se espera que emerjan argumentos como “la gráfica que representa el método que empleamos es una recta y tiene la misma pendiente y proporción”, mientras que “la gráfica que representa los datos del IMSS no es una recta, por lo tanto, no tiene la misma pendiente y no tiene proporción entre sus magnitudes”.

Se pretende que las y los futuros profesores realicen este tipo de respuestas en el apartado de tareas didáctico-matemáticas y hagan uso de conocimientos que fueron trabajando en el desarrollo de esta actividad.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

Tarea 8.

- a. ¿Qué diferencias encuentras entre la gráfica que representa tu método y la que corresponde a los datos del IMSS?
- b. Compara la pendiente de los puntos de tu método y la pendiente de los puntos correspondientes a la tabla del IMSS, ¿qué observas?
- c. ¿Cuál de los dos métodos consideras que es el mejor predictor para calcular tu peso?

4.2.2. Parte II. Tareas de desarrollo de competencias didáctico-matemáticas

El apartado siguiente tiene el objetivo de que los estudiantes para profesor inicien el desarrollo de la competencia de identificación de los conceptos y propiedades puestos en juego en sus soluciones y en las soluciones de sus estudiantes. La siguiente tarea pretende que emerja la distinción de cada objeto matemático y la identificación de ellos en las prácticas matemáticas que desarrollaron al resolver la situación problema dos, peso-estatura.

Análisis de objetos matemáticos

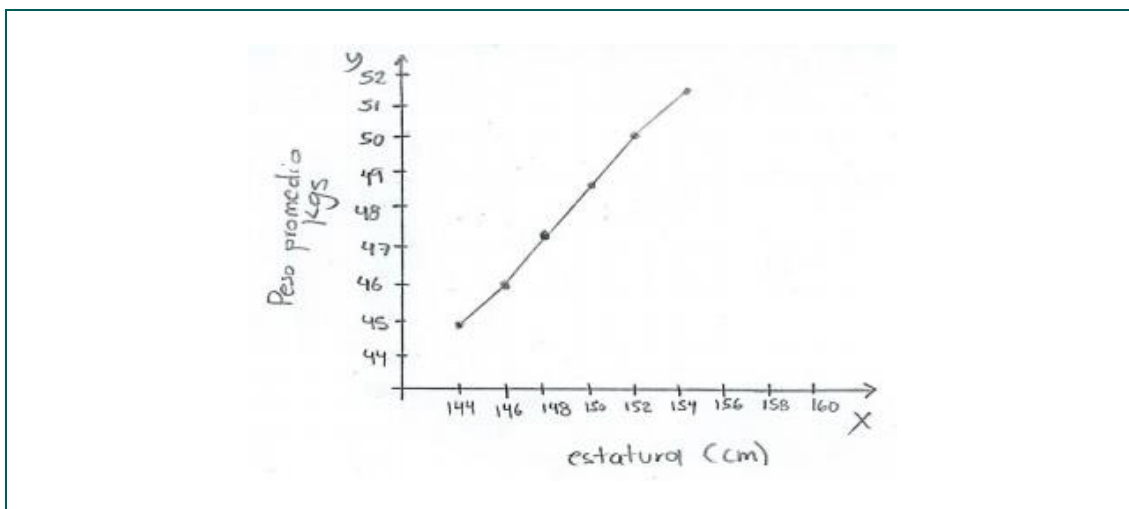
- a. ¿Qué propiedades de la variación lineal identificaste en la actividad? Escríbelas como enunciados.
- b. ¿Qué conceptos matemáticos identificas como nuevos? Enlístalos.
- c. ¿Qué aspectos nuevos de variación lineal identificaste? Descríbelos.

Después de haber dado respuesta a la tarea anterior, se les presentará una respuesta hipotética dada por un estudiante de secundaria, esto con el objetivo de que las y los futuros profesores identifiquen las variables de una tarea y describan los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas hipotéticas. También tiene la intención de que describan estrategias que se pueden implementar para orientar a los estudiantes a la resolución de sus tareas.

4.2.3. Parte III. Tareas didáctico-matemáticas

Análisis de la respuesta dada por un estudiante. Lee la siguiente situación de manera individual y contesta las preguntas que se te solicitan: Un estudiante de secundaria utilizó la tabla del IMSS para representar gráficamente la relación que existe entre el peso-promedio y la estatura. El estudiante afirmó que esta situación es un caso que representa una situación de variación lineal.

- a. ¿Estás de acuerdo con la información del estudiante? Justifica tu respuesta.
- b. ¿Qué argumentos le darías para reforzar tu punto de vista y retroalimentar al estudiante?
- c. ¿Cómo te ayudaría GeoGebra para retroalimentar al estudiante?



Con el fin de que las y los futuros profesores propongan tipos de estrategias que utilizarán para orientar a los estudiantes, se les pregunta acerca del uso de la tecnología, para identificar si existe alguna estrategia que consideren podrían enseñar con el uso de GeoGebra.

4.3. Vaciado de líquido de recipientes cilíndricos

Se promueven del estudio de una situación de variación lineal del tipo: $y = mx + b$, con $m < 0$, se trabajan tareas donde se representa este tipo de situaciones en rectas numéricas, representaciones gráficas cartesianas, lenguaje tabular, entre otras.

4.3.1. Parte I. Resolución de problemas matemáticos

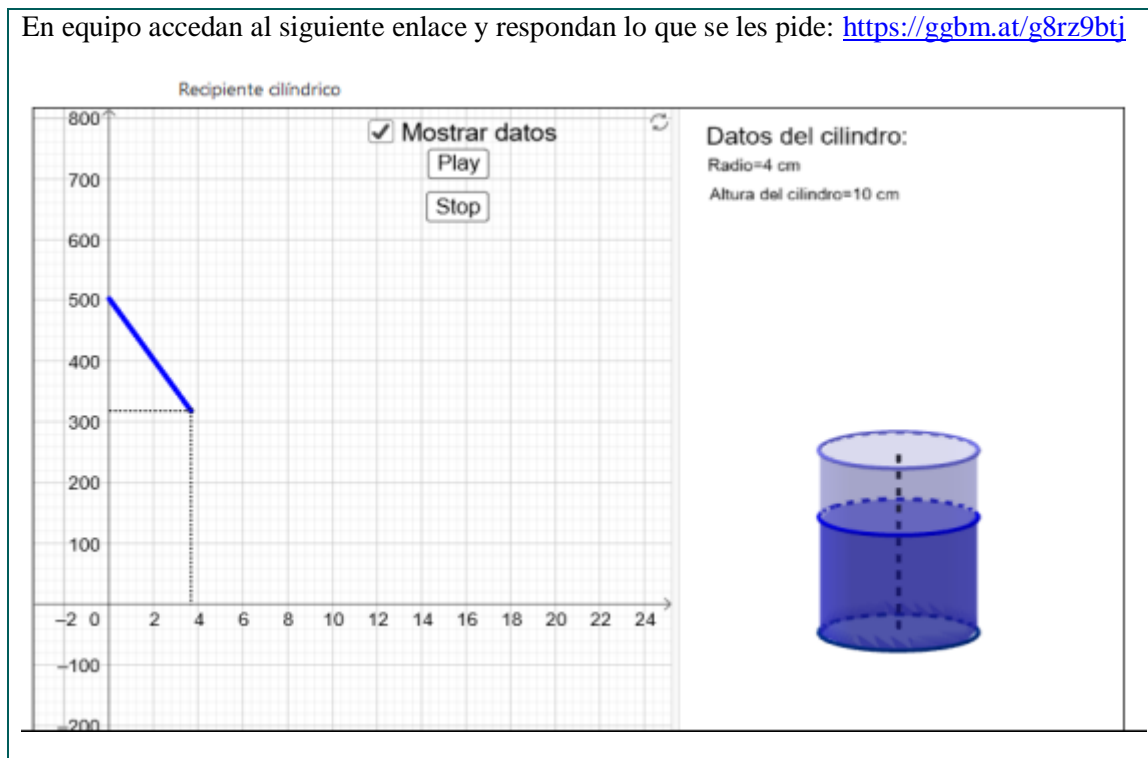
La situación problema que se presenta trata sobre un recipiente de 10 cm de altura lleno de agua, y se modela en GeoGebra cómo este se vacía. Simultáneamente, se muestra en el plano cartesiano un punto que se desplaza en línea recta y deja su rastro, con el objetivo de reforzar la idea de que las situaciones de variación lineal no son fenómenos estáticos, sino que estas tienen características de dinamicidad y causalidad. Posteriormente se les plantea tareas específicas a las y los futuros profesores, que tienen que ver con dos magnitudes, altura de la parte vacía y volumen del líquido del recipiente.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

En equipo accedan al siguiente enlace y respondan lo que se les pide: <https://ggbm.at/g8rz9btj>



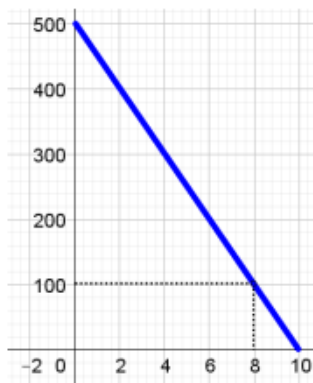
La tarea uno tiene el objetivo de que las y los futuros profesores identifiquen como magnitud constante al área de la base, y que distingan que las magnitudes que cambian son el volumen líquido del recipiente y la altura de la parte vacía del recipiente. Con base en esto, se espera que identifiquen en la representación gráfica cómo es el cambio en las magnitudes (volumen del recipiente y altura de la parte vacía del recipiente). La tarea del inciso d., pretende ayudar a los futuros maestros a identificar en un lenguaje gráfico las magnitudes que intervienen en el fenómeno de vaciado de este recipiente.

Tarea 1.

- a. ¿Qué magnitudes están cambiando en el recipiente cilíndrico?
- b. ¿Qué magnitudes se mantienen constantes?
- c. ¿Qué magnitudes se encuentran representadas en la gráfica que se muestra? Anota una en cada eje.

Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

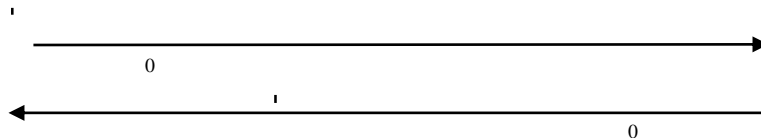
K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer



d. ¿Qué significado le das al punto de coordenadas (8, 100.5) que se muestran en la gráfica?

Con la tarea dos se espera que los estudiantes para profesor identifiquen más claramente cómo es el cambio de cada una de las magnitudes y su relación con la gráfica trazada por el punto móvil. La representación gráfica de las magnitudes en las rectas numéricas pretende ayudar a que identifiquen que las magnitudes tienen cambios uniformes, y que una aumenta (la altura de la parte vacía del recipiente) mientras la otra disminuye (volumen del líquido en el recipiente). Las tareas de los incisos a y b pretenden verificar si las y los futuros profesores identifican que el punto que se desplaza en la línea recta representa la variación conjunta de la parte vacía del recipiente con relación a la altura del líquido, y la razón por la cual la recta es descendente.

Tarea 2. Representa en las siguientes rectas numéricas cómo cambia cada magnitud que utilizaste en el plano cartesiano anterior. Anota la magnitud que corresponde a cada recta y describe cómo cambian.



a. ¿Qué significado tiene el punto que se desplaza sobre la recta con relación al fenómeno de vaciado del líquido en el recipiente?

b. ¿Qué características tiene la recta que se te presentó en el applet?

La tarea tres tiene el objetivo de que las y los futuros profesores identifiquen que, aunque una de las magnitudes disminuye cuando la otra aumenta, se conserva la propiedad de que las variaciones de las magnitudes son proporcionales. Además, se espera que se identifique que la constante de proporcionalidad puede ser negativa.

Tarea 3.

a. ¿Son directamente proporcionales el volumen del líquido y la altura de la parte vacía del recipiente? Si es así, calcula la constante de proporcionalidad.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

b. ¿Hay constante de proporcionalidad entre las variaciones de la altura de la parte vacía y los incrementos del volumen del líquido del recipiente? Si es así, calcúlala.

La tarea cuatro tiene el objetivo que emerja la propiedad de que la variación lineal en este caso se representa por una línea recta decreciente, cuya pendiente es negativa y coincide con la constante de proporcionalidad correspondiente a las variaciones de las magnitudes.

Tarea 4.

- a. Calcula la pendiente de la recta, ¿cómo se representa la pendiente en la recta?
- b. ¿Cómo se representa la pendiente y la constante de proporcionalidad en la gráfica? Argumenta tu respuesta.

La tarea cinco pretende que las y los futuros profesores utilicen lenguaje algebraico para representar la situación del fenómeno del vaciado del recipiente y lo expresen de la forma $y = mx + b$, con $m < 0$.

Tarea 5.

- a. Crea una expresión algebraica que represente la situación de vaciado del líquido del recipiente.

El siguiente apartado está destinado a la reflexión didáctico-matemática del tema variación lineal. Para que realicen la reflexión didáctico-matemática, es necesario que las y los futuros profesores identifiquen objetos matemáticos en la resolución de las tareas tales como son conceptos de la pendiente negativa, la constante de proporcionalidad, el incremento y decremento de cada magnitud. Se espera que emerjan propiedades de la variación lineal, como lo son: si una magnitud aumenta y la otra disminuye, pero las variaciones de las magnitudes tienen una relación de proporcionalidad directa, entonces se tiene un caso de variación lineal; la representación gráfica de la variación lineal es una línea recta y puede tener pendiente negativa; algebraicamente, una situación de variación lineal es del tipo $y = mx + b$, pero m puede ser negativa; y la constante de proporcionalidad de una situación de variación lineal puede ser negativa.

4.3.2. Parte II. Competencia didáctico-matemática

Se presentan a continuación las preguntas que se proponen para el desarrollo de la competencia didáctico-matemática.

Responde las siguientes preguntas a partir del trabajo que realizaste en esta actividad:

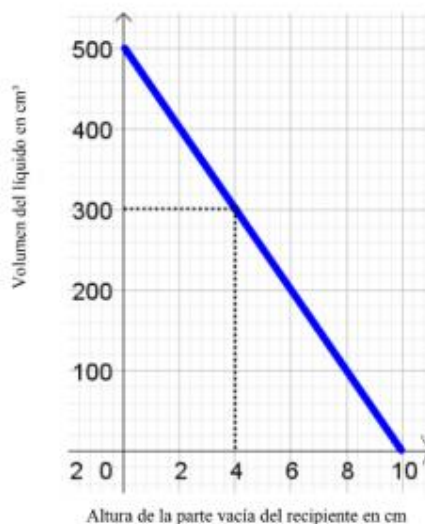
- a. ¿Qué conceptos matemáticos identificas en el desarrollo de la actividad?
- b. ¿Qué propiedades-proposiciones matemáticas consideras importantes resaltar con esta actividad?
- c. ¿Qué aspectos nuevos de variación lineal has identificado?

Se espera que en la respuesta al inciso c, los estudiantes identifiquen que para caracterizar la variación lineal es clave analizar si las variaciones de las magnitudes variables son proporcionales, y que la constante de proporcionalidad puede ser positiva, pero también negativa.

4.3.3. Parte III. Reflexión didáctico-matemática de una respuesta hipotética de un estudiante de secundaria.

La siguiente tarea tiene el objetivo de que el futuro profesor no sólo identifique los conceptos y propiedades-proposiciones que puso en juego en sus soluciones a las tareas matemáticas, sino que los emplee al valorar una respuesta hipotética de un alumno de secundaria. Se espera que identifique que la proposición “cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye” no necesariamente implica un caso de variación inversamente proporcional, sino que puede ser de variación lineal si se tiene una relación de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes involucradas.

Un profesor de matemáticas para explicar a sus estudiantes cómo se representa el vaciado de un recipiente cilíndrico, les muestra la siguiente gráfica:



Un estudiante concluye: “Este no es un caso de variación lineal porque cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye”.

- ¿Es correcta la conclusión a la que llegó el estudiante? Argumenta tu respuesta.
- ¿Qué retroalimentación le darías al estudiante?

4.4. Una clase de matemáticas

Se plantea una situación de enseñanza propuesta por una profesora de matemáticas de secundaria. Se espera que las y los futuros profesores resuelvan la actividad didáctica que propone la profesora de matemáticas y analicen la respuesta hipotética de un estudiante de secundaria. Se trata de abordar la variación lineal como tabla de valores con variaciones directamente proporcionales y su comparación con la variación inversamente proporcional.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

4.4.1. Parte I. Resolución de problemas matemáticos

El diseño de la actividad didáctica cinco tiene el objetivo de que las y los futuros profesores reflexionen sobre una clase de matemáticas donde se quiere enseñar el tema de variación lineal con constante de proporcionalidad negativa, pero se presentan confusiones con el tema de variación inversamente proporcional.

Se espera que en la tarea uno el futuro maestro utilice procedimientos como el cálculo de la variación de cada magnitud y lo utilice como argumento para concluir que la situación que se plantea no es una situación de variación lineal.

Tarea 1. De manera individual, piensa y responde la situación problema siguiente.

Andrea es una maestra de Secundaria y tiene días trabajando algunas nociones de variación lineal en su clase de Segundo año, pero siempre utiliza situaciones donde la constante de proporcionalidad es positiva. Ahora ella quiere poner un ejemplo de variación lineal con constante de proporcionalidad negativa. Con ese propósito decide plantear la siguiente **actividad 1**:

Actividad 1. El área de un rectángulo.

“Este día, vamos a trabajar en equipo de dos personas. Tenemos un rectángulo con área de 18cm^2 , pero queremos conocer las diferentes medidas que puede tener un rectángulo con esa área”.

¿Qué medidas podría tener la base y cuáles la altura para que el área del rectángulo sea de 18cm^2 ?

La maestra solicita a los estudiantes que pasen al pizarrón y registren la información en una tabla de datos. A continuación, algunos alumnos crearon la siguiente tabla:

Base (cm)	18cm	9cm	6cm
Altura (cm)	1cm	2cm	3cm

a) ¿Estás de acuerdo con la maestra Andrea de que la actividad que propuso a sus estudiantes representa una situación de variación lineal? Argumenta tu respuesta.

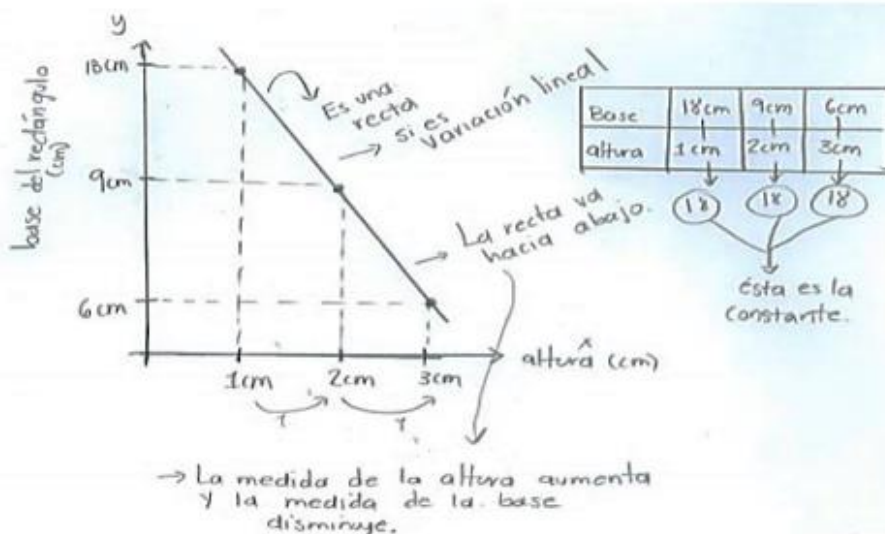
4.4.2. Parte II. Competencia didáctico-matemática

La tarea dos tiene el objetivo de indagar y provocar una reflexión sobre el conocimiento del contenido del futuro profesor en relación con los estudiantes y, a su vez, a los conocimientos del contenido, siempre en relación con el tema de variación lineal. En esta tarea, se presenta la respuesta hipotética de un estudiante de secundaria, y partir de ella, el profesor identificará aspectos matemáticos, así como también, reflexionará sobre aspectos cognitivos de la respuesta de un estudiante de secundaria.

REFLEXIÓN DIDÁCTICA

Tarea 2. De manera individual analiza la siguiente situación y contesta lo que se solicita.

La maestra pidió a los estudiantes graficar los datos de la tabla y determinar si hay variación lineal entre la base y la altura del rectángulo. Un estudiante de secundaria realizó lo siguiente



Contesta de manera individual las siguientes preguntas:

- ¿Qué interpretas de la respuesta que dio el estudiante?
- ¿Qué procedimientos matemáticos observas en su respuesta?
- ¿Qué propiedades matemáticas de variación lineal están presentes en la respuesta del estudiante?
- ¿Cómo calificarías la respuesta y las conclusiones dadas por el alumno? Argumenta tu respuesta.

La tarea tres propone al futuro profesor que utilice un applet de GeoGebra donde se modela dinámicamente el problema que plantea la profesora y se muestra la gráfica generada por el rastro de un punto que representa la variación conjunta de la longitud de la base y el área del rectángulo. Se espera que emerja la gráfica de una situación de variación inversamente proporcional y posteriormente que el futuro profesor describa en lengua natural las diferencias que encuentra entre la gráfica observada y una correspondiente a variación lineal, así como también tiene el objetivo de que las y los futuros profesores identifiquen otro tipo de variación, como es, la variación de proporcionalidad inversa.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

Tarea 3. Ingresas al siguiente applet: <https://ggbm.at/wg5trmye>

Grafiquen las coordenadas que el estudiante graficó en el plano cartesiano ¿encuentras diferencias entre la gráfica realizada por el estudiante la gráfica de GeoGebra? Si es así, describe cuáles son.

La tarea cuatro tiene la intención de que las y los futuros profesores reflexionen sobre el uso de los recursos tecnológicos que pueden ser apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes (trabajando con la faceta mediacional). Así como también, propone preguntas que tienen la intención de promover en las y los futuros profesores una valoración de la clase de matemáticas propuesta en esta actividad. Se busca que los estudiantes emitan ese juicio sobre la enseñanza indicando algunos cambios observados ya sean en el contenido matemático estudiado, los recursos utilizados y los modos de interacción profesor–estudiantes. También se busca que las y los futuros profesores identifiquen los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea propuesta. Se espera que realicen conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización es esta tarea.

Tarea 4.

- a. ¿Qué tipo de variación es la que promueve la actividad de la maestra?
- b. ¿Puede ayudar GeoGebra a ampliar tus reflexiones a las preguntas anteriores? Explica con detalle tu respuesta.
- c. ¿Cómo se puede mejorar el proceso de estudio que plantea la maestra? ¿Qué cambios le harías a esta actividad?
- d. ¿Qué contenidos matemáticos del currículo de secundaria se relacionan con la actividad planteada por la maestra? Si lo crees necesario, puedes checar el Programa de Estudios 2011 para dar respuesta a esta pregunta.
- e. Después de contestar las preguntas, discute con tus compañeros las respuestas dadas en las preguntas anteriores.

5. Consideraciones finales

El diseño de la secuencia didáctica retoma las directrices curriculares sobre variación lineal pero también aporta elementos para enriquecer su significado, como es el enfoque variacional para el tratamiento didáctico del tema, que incluye el uso de rectas numéricas donde se representa dinámicamente una magnitud variable a la vez. Además, se promueve el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, tras proponerse tareas que permitan al profesor analizar respuestas hipotéticas de estudiantes de secundaria y reorientar tras estrategias didácticas conocimientos específicos del contenido variación lineal. El tipo de actividades diseñadas constituyen un recurso a incorporar a los programas formativos de profesorado de matemáticas de secundaria. Además, las actividades propuestas contemplan el uso de applets virtuales, que pueden facilitar la elaboración de secuencias didácticas en un contexto de educación a distancia y/o semipresencial. En cualquier caso, sea cual sea la modalidad de enseñanza, se trata de potenciar el estudio de la variación lineal de manera dinámica, atendiendo a sus múltiples representaciones.

Reconocimiento

Este trabajo se ha desarrollado dentro de los proyectos PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/50110001103, PFID-FID-2021-45 (Panamá) y del grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Se hace un reconocimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) en México por la beca 862619 y a la Universidad de Sonora por el apoyo brindado para el diseño y realización de la propuesta de secuencia didáctica discutida en este trabajo.



Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesorado de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

Bibliografía

- Bojórquez A., Castillo, J. M., & Jiménez J. R. (2016). Development of the variational thought in secondary students. *Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME)* 2016. 29 de junio al 2 de julio de 2016. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and their role in the development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998) The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-83
- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, 29(4), 1109-1131.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Huang, R. & Li, Y. (Eds.). (2017). *Teaching and Learning Mathematics through Variation*. Confusian Heritage Meets Western Theories. United States: Sense Publishers
- Jiménez-Rodríguez, J. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics. En A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 301-304). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA.
- Parra-Urrea, Y. E. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. (Tesis de magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.
- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220.
- Panorkou, N., Maloney, A., & Confrey, J. (2014). Expressing Covariation and Correspondence relationships in elementary schooling. NCTM.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria

K. J. Herrera-García, M. T. Dávila-Araiza, B. Giacomone y P. Beltrán-Pellicer

Karina Jaquelin Herrera Garcia. Escuela Normal Superior de Hermosillo, Luis Orcí y H. Ayuntamiento, Colonia Choyal, C.P. 83138, Hermosillo, Sonora. Licenciada en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas por la Escuela Normal Superior de Hermosillo. Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por la Universidad de Sonora.

Email: ensh.kjherrera@creson.edu.mx

María Teresa Dávila-Araiza. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, Blvd. Luis Encinas y Rosales, S/N, CP. 83000, Hermosillo, Sonora. Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas. Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por la Universidad de Sonora. Doctora en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN).

Email: maria.davila@unson.mx

Belén Giacomone. Universidad de la República de San Marino (departamento DESD), World Trade Center (torre B, terzo piano), 47891 Dogana, Repubblica di San Marino. Profesora de Matemáticas por la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Máster en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada, España. Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, España.

Email: belen.giacomone@unirsm.sm

Pablo Beltrán Pellicer. Área de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza, España, y CPI Val de la Atalaya (María de Huerva). Doctor en Didáctica por la UNED.

Email: pbeltran@unizar.es

