

Aventuras y desventuras con la proporcionalidad

Pablo Beltrán-Pellicer¹, Sergio Martínez-Juste¹, Antonio M. Oller-Marcén²

¹Universidad de Zaragoza

²Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Versión preprint. Cítese como:

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S., & Oller-Marcén, A. M. (2022). Aventuras y desventuras con la proporcionalidad. *UNO*, 98, 49-55.

Resumen

No es difícil reconocer que las situaciones de proporcionalidad directa forman parte de la cotidianidad matemática de todos nosotros. Recetas de cocina, préstamos, ofertas, cálculo de dosis de medicamentos son solo algunos ejemplos que muestran la necesidad de hacer uso del razonamiento proporcional en múltiples contextos. En este artículo realizamos un breve recorrido por alguna de estas situaciones, identificando qué elementos conviene conocer y poner en juego para poder interpretarlas de forma adecuada.

Palabras clave: proporcionalidad, vida cotidiana, razón, magnitudes y medida

Introducción

No te preocupes, ya te ayudo con los deberes. Eso son problemas de regla de tres. Es lo más útil que aprendí de matemáticas en el colegio. Se usa para todo. A ver, cómo era esto...

Dejando de lado la cuestión sobre la idoneidad de los deberes, reflexionemos sobre la frase anterior. Por un lado, nos encontramos con el clásico recuerdo de la regla de tres como lo más importante, por útil, de las matemáticas escolares. Además, observamos una identificación de la proporcionalidad con la resolución de un tipo de “problema” aplicando un tipo concreto de técnica de resolución. Esto nos podría llevar a reflexionar sobre si los típicos problemas escolares, resueltos mediante el uso de técnicas aplicadas de forma acrítica, merecen la calificación de problema.

Es cierto que la proporcionalidad tiene multitud de aplicaciones prácticas. Sin embargo, esta practicidad no justifica el tratamiento curricular que de forma histórica ha recibido este objeto. Por un lado, los contenidos relacionados con la proporcionalidad tienen una gran relevancia no solo práctica, sino también cultural, pública, instrumental o propedéutica (Martínez-Juste, 2022). Un adecuado diseño curricular debería contemplar todas estas dimensiones en el desarrollo del razonamiento proporcional. Por otro lado, centrándonos en su practicidad, la

proporcionalidad permite modelizar una gran variedad de fenómenos dando lugar a tareas matemáticas diversas. Así, la resolución de tareas prototípicas no supone una adecuada preparación para afrontar la modelización de estas situaciones reales.

En este artículo, queremos destacar algunos de los aspectos que consideramos básicos para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad a través de ejemplos prácticos y cotidianos.

Plantas sanas y bonitas

¡Qué bonito este anturio de flores rojas que has comprado! (ver Figura 1) Seguro que, como todo ser vivo, necesita cuidados y alimentos. Deberíamos buscar un abono adecuado para que crezca fuerte y sano.



Figura 1. Anturio. Fuente: Maja Dumat - Creative Commons Licence BY 2.0

De los diferentes tipos de abono que existen, hemos elegido uno que se vende en barritas que se clavan en la tierra de la maceta (Figura 2). Este abono se disuelve en la tierra con el riego, así que la cantidad de barritas que hay que clavar es mayor según aumenta la tierra que contiene la maceta.



Figura 2. Barritas de abono. Fuente: Elaboración propia

El fabricante, para facilitar su uso, proporciona una tabla en la que nos dice las barritas necesarias según el tamaño de la maceta (Figura 3, izquierda). En concreto el número de barritas parece depender del diámetro de la maceta.

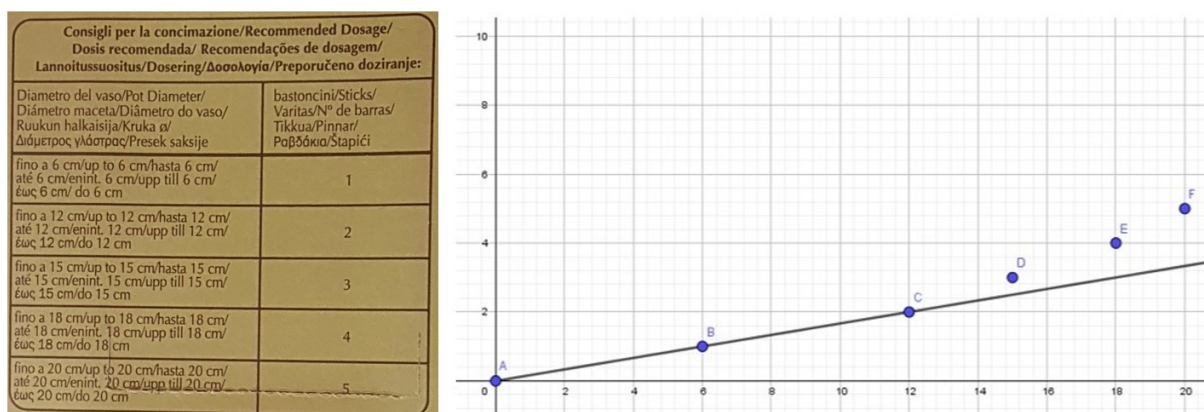


Figura 3. Indicaciones del fabricante de abono y representación gráfica. Fuente: Elaboración propia

El problema es que nuestra maceta tiene un diámetro de 25 cm y ese valor no aparece en la tabla. ¿Cuántas barritas de abono tenemos que clavar? ¿Podemos deducirlo a partir de la información que tenemos?

En las dos primeras filas de la tabla se nos indica que si la maceta tiene 6 cm de diámetro necesitamos una barrita y que, si tiene 12 cm de diámetro, son necesarias dos barritas. Si nos fijamos únicamente en estas dos primeras filas, parece que cada 6 cm de diámetro de maceta requieren de una barrita. Es decir, la razón entre el número de barritas y los centímetros de diámetro es 1/6 de barrita por cada centímetro de diámetro. Por tanto, el número de barritas que habría que clavar en una maceta de 25 cm de diámetro sería:

$$25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{6} \approx 4,17.$$

Sin embargo, si miramos la tabla con un poco más de atención, vemos que un poco más abajo se dice que en una maceta de 18 centímetros de diámetro hay que clavar cuatro barritas. Algo falla en nuestro razonamiento. Gráficamente, esta situación se traduce en el hecho de que, si representamos gráficamente la variable 'diámetro (en cm)' en el eje X y la variable 'número de barritas' en el eje Y, los puntos no se ajustan a la recta de ecuación $y = x/6$ (Figura 3, derecha).

Si repasamos el modo en que hemos abordado el problema es evidente que el fallo radica en la suposición "cada 6 cm de diámetro de maceta requieren de una barrita". Es decir, no podemos definir la razón entre las magnitudes involucradas (cantidad de barritas y diámetro de la maceta). Para que se pueda definir esta razón es imprescindible que se cumpla una cierta condición de regularidad (Martínez-Juste, 2022). En este caso, dicha condición de regularidad consistiría en que la cantidad de abono necesaria por cada centímetro de diámetro sea fija. Obviamente esta condición no se cumple y, aunque sí que hay una relación entre las dos

magnitudes, no es lineal. Suponer que es así es un ejemplo de la llamada ilusión de linealidad (Van Dooren et al., 2008).

Para entender qué está sucediendo, debemos analizar más cuidadosamente las magnitudes involucradas. Como hemos dicho, el número de barritas es variable y depende de la cantidad de tierra de la maceta. En otras palabras, las magnitudes relevantes en esta situación son la cantidad de barritas y el volumen de tierra. De hecho, aunque no se nos dan datos para comprobarlo, parece razonable suponer que la cantidad de abono necesaria por unidad de volumen sea fija. De este modo se podría afirmar que las magnitudes cantidad de barritas y volumen de la maceta son directamente proporcionales.

Teniendo en cuenta que calcular el volumen de una maceta puede resultar complicado, el fabricante ha optado por proporcionar información basada solamente en el diámetro de la maceta. Pero esta información no es suficiente, ya que en realidad el volumen de una maceta no depende solamente de su diámetro (se sobreentiende que el de la parte superior), sino también de su altura y de otras medidas en función de su forma. Este podría ser el punto de partida de una interesante actividad de modelización.

Si nos centramos en aspectos específicos de la proporcionalidad, esta situación permite destacar algunos elementos fundamentales desde un punto de vista didáctico, y que van más allá del contexto considerado:

- La importancia de identificar las variables presentes en la situación. En nuestro caso, aparecen de modo explícito la cantidad de barritas y la longitud del diámetro, pero al analizar la situación aparece el volumen de la maceta o las dimensiones de esta según su forma.
- La necesidad de que se cumplan ciertas condiciones de regularidad para que tenga sentido definir la razón entre dos magnitudes relacionadas. En nuestro ejemplo no se cumple la relación de regularidad entre las magnitudes cantidad de barritas y longitud del diámetro, pero sí que podría aceptarse la existencia de dicha condición entre las magnitudes cantidad de barritas y volumen de la maceta.
- Una vez que se admite que dos magnitudes están relacionadas, estas pueden estarlo de muchas formas diferentes. La relación de proporcionalidad directa es solo un caso particular de relación entre magnitudes.

Un dilema similar al anterior lo encontramos a la hora de decidir qué tamaño de pizza, de entre varios que nos oferta un restaurante, es más económico. En este caso, un error habitual es considerar las razones entre el precio de las pizzas y su diámetro para decidir entre posibles ofertas que nos ofrezca una pizzería. Sin embargo, para considerar una relación de proporcionalidad directa deberíamos centrarnos en la razón entre el valor de la pizza y su área.

Estos ejemplos, además, muestran que las situaciones en las que aparece la proporcionalidad no siempre se reducen al cálculo de una cantidad desconocida de una de las magnitudes.

Muchas veces, la clave es el cálculo, y correcta interpretación, de las constantes de proporcionalidad para comparar cuál de varias situaciones “es más ventajosa”.

El día sin IVA

¡Mañana es el día SIN IVA! ¿No se te había roto la televisión? ¡Aprovecha, que tienen el 21 % de descuento! (Figura 4)



Figura 4. Oferta del día sin IVA. Fuente: <https://www.mediamarkt.es/es/campaign/dia-sin-iva>

En ocasiones se toma a la ligera la cuestión de los porcentajes, identificando $0,1 = 10/100 = 10\%$. Presentar los porcentajes como algo trivial y sin conexión con la proporcionalidad parece ser el origen de algunas de las dificultades en su aprendizaje (Martínez-Juste, 2022). Conviene tener en cuenta que un porcentaje puede expresar una relación parte-todo, una relación parte-parte, una relación entre cantidades de magnitudes diferentes, un operador que actúa sobre otra cantidad de magnitud, una probabilidad, una pendiente, un número racional, etc. El éxito del porcentaje se debe a que ofrece un único lenguaje para describir relaciones de proporcionalidad directa (Parker y Leinhardt, 1995) en las más diversas situaciones.

Pensar que el porcentaje no es más que la cantidad resultante de haber dividido un total en 100 partes iguales no refleja su naturaleza como forma de expresar una relación entre cantidades. Identificarlo únicamente como un número induce a operar con él de la misma manera que operamos con los números. Puede caerse en el error de sumar porcentajes cuando estos no están asociados a un mismo referente. Esto se aprovecha en el ámbito de las ofertas para llamar la atención de los posibles compradores. Por ejemplo, en la oferta de la Figura 5 se publicita un triple descuento del $15\% + 7\% + 3\%$. ¿Qué descuento nos hacen? Introducir el signo de la suma puede llevarnos a pensar en un descuento del $15+7+3=25\%$. Sin embargo, lo que ocurre es que los diferentes descuentos expresados mediante porcentajes se aplican sobre cantidades diferentes. Sobre el precio inicial hay que efectuar un descuento, sobre la cantidad resultante, aplicar el segundo descuento y, finalmente, sobre la cantidad resultante, aplicar el tercer descuento.



Figura 5. Ejemplo de “triple descuento”. Fuente: Facebook de Muebles Rey.

Pensemos este problema desde la interpretación del porcentaje como forma de expresar una relación de proporcionalidad directa entre cantidades. El 15 % significa que nos descuentan 15 € por cada 100 € del precio original. Este descuento puede normalizarse a la unidad, obteniendo la razón 0,15 que significa que descuentan 0,15 € por cada euro del precio original. A partir de aquí puede procederse de dos maneras. O bien calculamos la cantidad de euros que nos descuentan y luego la restamos al precio original, o bien consideramos que, con el descuento, estamos pagando 0,85 € por cada euro del precio original ($1 - 0,15 = 0,85$).

Si por cada euro del precio original pagamos 0,85, bastará multiplicar ese precio original por 0,85 para obtener la cantidad a pagar tras el primero de los tres descuentos. Siguiendo el mismo razonamiento, podemos encadenar de forma multiplicativa los tres descuentos: $0,85 \cdot 0,93 \cdot 0,97 \approx 0,77$. Es decir, pagamos 0,77 € aproximadamente por cada euro del precio inicial, con lo que el porcentaje de descuento es, aproximadamente, un 23 %. Algo menos que el 25 % al que parecía llevarnos a pensar la publicidad de la oferta.

Resulta pues, importante, interpretar de forma flexible el porcentaje para poder razonar de manera adecuada con él. En particular, es clave identificar las cantidades de magnitud implicadas en la situación. Retomando la situación inicial de esta sección, el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA) es un impuesto, en España, que grava el consumo. Existen reducciones según la clase de producto, pero en general el tipo del impuesto es el 21 %. La oferta denominada «Día sin IVA» suele publicitarse en los carteles con un rótulo que indica ese 21 % con un tamaño de fuente nada despreciable. Ahora bien, ¿están aplicando realmente un 21 %?

Aunque interviene un 21 % en la situación, este se corresponde con el aumento que debe aplicarse si tomamos como referencia el precio sin IVA para calcular el precio final de venta al público. Sin embargo, si queremos calcular el descuento que se aplica al precio de venta al

público si se elimina ese impuesto, debemos cambiar nuestra referencia a ese precio final. Si por cada 100 € del precio inicial, el precio de venta al público es de 121 €, la razón $100/121 \approx 0,83$ nos indica los euros del precio sin IVA por cada euro del precio de venta al público. Es decir, que si una tienda deja de aplicar el IVA estará descontando al comprador $1 - 0,83 \approx 0,17$ € por cada euro. Es decir, un descuento del 17 %.

Conclusión

En matemáticas interesa poner el foco en la construcción de los objetos matemáticos. Casi podríamos llegar a decir que dar con la solución de un problema es algo secundario. Desde luego, no se trata de proporcionar un método mecánico para abordar ejercicios con decorado y obtener su solución de forma irreflexiva. En las secciones anteriores se ha hecho énfasis en la relativa complejidad de los fenómenos asociados a estructuras de proporcionalidad directa, sin entrar en otras más complejas como la proporcionalidad inversa o compuesta. Además, conceptos centrales de la proporcionalidad como la razón entre magnitudes tienen conexiones fundamentales en áreas de las matemáticas como la geometría o la probabilidad y estadística; así como múltiples aplicaciones en las ciencias experimentales y en las ciencias sociales.

La modelización de situaciones de proporcionalidad implica reflexionar sobre las relaciones que podemos suponer entre las magnitudes involucradas, buscando condiciones de regularidad para poder discernir si el cálculo de las razones entre dichas magnitudes es pertinente y poder realizar una adecuada interpretación de las mismas. Establecer debates adecuados con el alumnado a partir del análisis de las situaciones que se pretenden modelizar es una tarea fundamental para construir significados y establecer conexiones.

Por último, es importante reflexionar acerca de que las técnicas propias de una estructura concreta de proporcionalidad y de un tipo particular de problema solo son útiles en tareas aisladas y no cubren el amplio espectro fenomenológico asociado a la proporcionalidad. Por ello, es imprescindible tener en consideración los aspectos conceptuales y que son clave para modelizar situaciones reales, evitando la aplicación de técnicas mecanizadas de resolución, como la regla de tres (Martínez-Juste et al., 2022), y planteando situaciones ricas que fomenten la reflexión y el aprendizaje a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021).

Agradecimientos

Trabajo realizado como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, con apoyo del Grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Bibliografía

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Valladolid. <https://doi.org/10.35376/10324/52863>

Martínez-Juste, S., Oller-Marcén, A. M., Muñoz-Escolano, J. M., & Beltrán-Pellicer, P. (2022). Sobre la regla de tres y la proporcionalidad aritmética. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 25(2), 353-371.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.