LA FRACCIÓN A TRAVÉS DE LA CONEXIÓN ENTRE EL SENTIDO DE LA MEDIDA Y EL SENTIDO NUMÉRICO

SERGIO MARTÍNEZ-JUSTE
Universidad de Zaragoza
PABLO BELTRÁN-PELLICER
Universidad de Zaragoza

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas no son un conjunto de saberes compartimentados en ramas bien separadas. Por su naturaleza, se establecen importantes conexiones entre todas ellas y, no en vano, muchos de los grandes hitos en la historia de las matemáticas sirven para ilustrar esta cuestión. Por ejemplo, Descartes, cuando en el siglo XVII funde geometría y álgebra, abre campos impensables hasta entonces, cuando cada una de estas ramas se ocupaba de problemas diferentes. Más recientemente, ya en los años 90 del siglo XX, Andrew Wiles establece conexiones profundas entre problemas aparentemente no relacionados para demostrar el último teorema de Fermat.

Así pues, las conexiones, en matemáticas, son importantes per se. No solo para hacerlas avanzar, sino que, epistemológicamente, forman parte de su naturaleza. Por lo tanto, los procesos de enseñanza y aprendizaje deben tener en cuenta las conexiones en los diseños didácticos. En consonancia, los Principios y estándares para la educación matemática del NCTM (2000), una de las orientaciones internacionales de más relevancia de los últimos años, las consideran como uno de los diez estándares.

De esta manera, se subraya la importancia que tienen las conexiones, no solo como un elemento intrínseco de las matemáticas, sino también como un motor de aprendizaje y como un indicador de comprensión profunda (NCTM, 2000, p. 64). En el aula, el alumnado no solo aprende matemáticas, sino su utilidad y cómo se conectan las matemáticas entre sí (conexiones intra matemáticas) y con otras materias o experiencias (conexiones extra matemáticas). En particular, en estos Principios y estándares del NCTM se enfatiza la necesidad de una enseñanza y aprendizaje que conduzcan a a) Reconocer y usar las conexiones entre las ideas matemáticas; b) Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y se construyen una sobre otra para producir un todo coherente; c) Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas.

La importancia de las conexiones queda recogida en el reciente currículo de Matemáticas en España, al amparo de la LOMLOE, cuyas líneas estatales las marcan el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria; el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria y el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. En particular, en estos currículos el estándar del NCTM (2000) se identifica claramente en un eje de competencias específicas dedicado a las conexiones. En Educación Primaria lo forma una única competencia específica, que integra esas conexiones intra y extra matemáticas que comentábamos antes:

> Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos. (Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo).

En Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato se divide en dos competencias específicas. A continuación, recogemos las correspondientes a la ESO, donde se aprecia que se dedica una competencia a las conexiones internas de las propias matemáticas y otra competencia para las conexiones externas:

> Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

> Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. (Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo).

Sin duda, los nuevos currículos supondrán un reto para los docentes pues incorporan novedades importantes. Por ejemplo, los criterios de evaluación se refieren únicamente a las competencias específicas, por lo que los docentes deberán articular situaciones de aprendizaje para desarrollarlas al mismo tiempo que se construyen los saberes. Estos saberes se articulan por primera vez en lo que se denomina sentidos (numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo), en lugar de en bloques de contenidos. La intención es que, de esta manera, se subraya el carácter competencial, la permeabilidad entre los diferentes saberes y se promueve el establecimiento de conexiones.

Las conexiones entre los diferentes saberes matemáticos en el ámbito de las matemáticas escolares se pueden rastrear en diferentes trabajos de investigación y en descripciones de experiencias docentes. En el presente trabajo nos centraremos en las fracciones, como excusa para ilustrar un ejemplo de conexión entre dos sentidos, en este caso, el numérico y el de la medida.

El sentido numérico es la habilidad para descomponer números de forma natural, emplear referentes numéricos de forma apropiada y ágil, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas de manera flexible y creativa en la resolución de problemas, comprender el sistema de numeración posicional de base 10, estimar, dar significado a los números y reconocer su magnitud (Sowder, 1992). El desarrollo del sentido numérico no se relaciona únicamente con aquellas ideas y conceptos alrededor de los números que se van trabajando en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que también tiene una faceta muy personal y se relaciona con cómo se ha llegado a dichos conceptos y las conexiones que se establecen (Anghileri, 2006).

El sentido de la medida, por su parte, se describe en el Real Decreto de Enseñanzas mínimas como:

> El sentido de la medida se caracteriza por la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural. Entender y elegir las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar; utilizar instrumentos adecuados para realizar mediciones, y comprender las relaciones entre magnitudes, utilizando la experimentación, son sus elementos centrales. (Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo).

Esta descripción merece ser ampliada y desarrollada, precisamente, a partir de las conexiones con otros sentidos. ¿Por qué la medida en matemáticas? En primer lugar, la medida engloba un conjunto de saberes que resultan de gran practicidad en situaciones de la vida cotidiana. Así, la medida ofrece contextos de aprendizaje y oportunidades de conexión excelentes para aplicar y relacionar otros saberes, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, relaciones y funciones o estadística.

Sin embargo, la medida en matemáticas es particularmente especial por otro motivo. Al verbalizar las acciones que se realizan en situaciones que involucran la manipulación de magnitudes y, especialmente, la comunicación del resultado de un proceso de medida surge la necesidad de un nuevo tipo de número: el número racional positivo, en sus múltiples representaciones simbólicas (fracciones, decimales, etc.). El desarrollo curricular de la LOMLOE de Aragón recoge esta conexión, tanto en su normativa para Educación Primaria (Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio) como para Educación Secundaria Obligatoria (Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto).

Por último, una gestión de aula desde los procesos de resolución de problemas atenderá al sentido socioafectivo, por lo que también surgirán conexiones con este. Igualmente, el uso de representaciones compartidas con la geometría llevaría a establecer conexiones con el sentido espacial. No obstante, nos limitaremos a estudiar las conexiones entre el sentido numérico y de la medida relativas a la construcción de las fracciones.

2. OBJETIVOS

El presente trabajo se plantea como objetivo identificar el establecimiento de conexiones entre el sentido numérico y el sentido de la medida. En particular, queremos indagar cómo, a través de tareas que ejemplifican la introducción de las fracciones desde un modelo de aprendizaje basado en la medida (Escolano, 2007), se desarrollan aspectos característicos del sentido numérico.

3. METODOLOGÍA

Tomamos como base para el desarrollo del proyecto la metodología *Lesson Study*, en español Estudio de Clase (Lewis y otros, 2006). Este término referencia a las estrategias de desarrollo curricular y profesional llevadas a cabo en Japón que, aunque de características dispares, tienen como nexo común que las sesiones de clase son observadas de forma presencial por un grupo de profesores que recogen datos tanto sobre el aprendizaje de los alumnos, como sobre los procesos de enseñanza puestos en juego por el docente, para después analizarlos y reflexionar sobre ellos de forma colaborativa. Se sitúa, por tanto, dentro del paradigma de la investigación-acción al ser los propios prácticos, acompañados por teóricos, los que protagonizan el proceso de investigación (Elliot, 2015)

Las fases en las que se compone un Estudio de Clase -estudio, planificación, acción/observación y reflexión- se suceden cíclicamente, de forma que el profesor observado pasa a ser observador y uno de los observadores imparte la lección en el siguiente ciclo (Ono y Ferreira, 2010).

Para aplicar esta metodología se formó un grupo de ocho profesores de un centro de secundaria (IES Pilar Lorengar de Zaragoza) y otros dos profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza. Además, el profesor del centro de secundaria que coordinaba el proyecto (y primer autor de este trabajo) también era profesor del área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Las características organizativas del centro hicieron imposible que todos los miembros del grupo de trabajo observaran las sesiones de clase impartidas, por lo que el grupo de trabajo completo participó en las fases de estudio y reflexión, en las que se proponía el diseño de las sesiones y se evaluaba su funcionamiento. La fase de acción la realizaron el coordinador del proyecto y otra profesora del centro de secundaria. Las particularidades de la organización durante el proyecto, así como el total de unidades didácticas que se abordaron, pueden consultarse en los trabajos de Martínez-Juste (2020) y Martínez-Juste y Domenech (2019).

La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disposición del centro escolar y a la disponibilidad del primer autor, que, como hemos dicho, también actúa como profesor en esta experiencia. En total, se actuó sobre 97 alumnos y alumnas de 1º de ESO que se distribuían en 4 grupos de clase. En un primer momento se desarrollaron dos ciclos de investigación-acción en dos grupos con observación directa dentro de clase, y en un segundo momento, la propuesta final se llevó a cabo en el resto de los grupos de 1º de ESO que participaron en el proyecto.

Para la elaboración de la propuesta de enseñanza se utilizó un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021). Este enfoque sigue un modelo de constructivismo guiado que aparece como alternativa a los enfoques para y sobre la resolución de problemas. La enseñanza para la resolución de problemas hace referencia a una concepción instrumental de la educación matemática en la que en un primer momento se expone el conocimiento y posteriormente el alumnado lo aplica. La enseñanza sobre la resolución de problemas se centra en promover la competencia del alumnado en la resolución de problemas a partir de estrategias generales y el uso de heurísticos. En el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas los alumnos adquieren el conocimiento enfrentándose a la resolución de problemas diseñados por el profesor o la profesora con la intención de hacer emerger los contenidos matemáticos.

Además, tiene en cuenta una visión inclusiva de la educación en donde el diseño inicial se planifica para dar respuesta a las diferencias individuales:

> Con el enfoque a través de la resolución de problemas se asume esa diversidad continuamente. Para comprender cómo se atiende esta diversidad es necesario tener en cuenta que, después de cada unidad, no todos los alumnos van a aprender lo mismo. [..] cada alumno crea sus propios significados personales sobre el contenido matemático.
>
> Las secuencias didácticas, por tanto, deben facilitar el desarrollo de estos significados. Por eso, las actividades […] tienen un suelo bajo y un techo alto (*low floor- high ceiling*). Es decir, tienen un punto de entrada asequible para todos, sin planos de abstracción formal innecesarios que impidan el acceso a las ideas matemáticas que hay detrás. Y permiten

> progresar y profundizar, enriqueciendo esos significados personales y facilitando el máximo desarrollo personal de cada alumno. (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección presentamos las ideas principales y el esquema de la secuencia didáctica resultante de los diferentes ciclos de investigación realizados y discutimos algunas de las producciones del alumnado.

4.1. ACTIVIDADES DE MEDIDA CON UNIDADES ARBITRARIAS

De entre los diferentes significados asociados al número racional y su representación simbólica en forma de fracción (Behr y otros, 1983; Kieren, 1980), se seleccionó el relacionado con las actividades de medida como significado inicial para la construcción de los contenidos en la secuencia didáctica. Este significado, según Escolano (2007), está en el origen histórico del número racional positivo, además, la enseñanza basada en dicho subconstructo se muestra útil para paliar las deficiencias detectadas en la enseñanza habitual de las fracciones en Educación Primaria alrededor de los modelos parte-todo.

En este sentido, siguiendo las ideas de Escolano (2007), planeamos un modelo de enseñanza de la fracción a través de la medida de la magnitud longitud. El alumnado, usando una unidad arbitraria proporcionada por el profesorado, realiza diferentes actividades de medida utilizando material manipulativo (ver **FIGURA 1**). La fracción aparece de este modo como resultado de expresar numéricamente una cantidad de magnitud, en nuestro caso longitud.

El material manipulativo consistía básicamente en tiras de papel (y también tiras de otros materiales como cartulinas o goma EVA). Para los objetos soportes de la unidad se recortaron tiras equivalentes al largo de un DIN-A4. Para los objetos que se medían se utilizaron tiras de papel térmico.

FIGURA 1. *Alumnas de 1º de ESO realiza una actividad de medida (miden la longitud de la tira verde) con unidades arbitrarias (largo de un DIN-A4 en tiras de papel blanco) con sentido de cálculo en el que el resultado se puede expresar como una fracción de la unidad.*

Fuente: elaboración propia.

El alumnado en las primeras sesiones realiza actividades de medida de la magnitud longitud con unidades arbitrarias, tanto en sentido de cálculo como en sentido de construcción (Chamorro y Belmonte, 1991).

En las actividades de cálculo, dadas tiras de una cantidad racional (respecto a la unidad elegida) que previamente preparaba el profesorado, el alumnado debía calcular su medida mediante una técnica directa de recubrimiento con unidades o subunidades. Por ejemplo, como se muestra en la **FIGURA 1**, las alumnas para cubrir la tira verde han necesitado dividir la unidad en dos partes iguales y han necesitado cinco de esas partes para cubrir el objeto, es decir la tira verde mide 5/2 u. Por tanto, mediante este modelo se interpreta la fracción como una cantidad de magnitud (la longitud que tienen las tiras), el numerador como el número de subunidades necesarias para cubrir el objeto y el denominador da cuenta del tamaño de las subunidades indicando en cuántas partes ha quedado dividida la unidad para generar las subunidades.

Por otra parte, en las actividades de construcción al alumnado se le indica que debe recortar una tira de una medida proporcionada por el docente en forma de fracción de la unidad.

Las actividades con material manipulativo van siempre acompañadas de la actividad equivalente en la que se trabaja la representación gráfica de la fracción. Así, el alumnado, poco a poco, construye un significado asociado a la fracción mediante las actividades manipulativas que se traslada paulatinamente al trabajo con las representaciones gráficas con el objetivo de forma que puedan evocar las manipulaciones hechas para realizar argumentaciones en las actividades posteriores sin el material.

La construcción de significado a partir de estas actividades asociadas al sentido de la medida se muestra efectiva desde las primeras sesiones en el desarrollo del sentido numérico. Este avance se evalúa con actividades como la que se muestra en la **FIGURA 2**. En este tipo de actividades, el alumnado debe razonar empleando los significados del modelo de medida y evocando las acciones realizadas con el material, la respuesta a tareas de comparación o aproximación de fracciones sin haber trabajado técnicas numéricas específicas.

FIGURA 2. *Actividades para evaluar la adquisición del sentido numérico tras realizar el trabajo con el material manipulativo para construir un significado de medida para la fracción.*

[2.1] Un papiro de $\frac{9}{8}$ Bu es...

a) ... más largo que un Bu.

b) ... más corto que un Bu.

c) ... igual de largo que un Bu.

d) ... imposible saberlo sin hacer cuentas.

[2.4] ¿A qué papiro se parece más uno que mide $\frac{11}{30}$ Bu?

a) A un papiro de un Bu.

b) A un papiro de medio Bu.

c) A un papiro de tercio de Bu.

d) Imposible saberlo sin hacer cuentas.

Fuente: elaboración propia.

A modo de ejemplo, en la **TABLA 1**, se muestran los resultados obtenidos en las preguntas de la **FIGURA 2** durante la implementación. Como vemos en las casillas grises correspondientes a las respuestas correctas, una amplia mayoría de alumnos pudo contestar correctamente utilizando los argumentos propios del modelo de medida, aunque es destacable que la tarea de aproximación durante estas primeras sesiones resultó de una mayor dificultad que la de comparación.

***TABLA 1**. Frecuencias absolutas y porcentaje (N=97) de respuestas a dos preguntas de opción múltiple para evaluar el sentido numérico tras la segunda sesión de la secuencia. En gris se marca la respuesta correcta.*

	Opción a		Opción b		Opción. c		Opción d	
	Frec.	Porc.	Frec.	Porc.	Frec.	Porc.	Frec.	Porc.
Ítem 2.1	91	94 %	6	6 %	0	0 %	0	0 %
Ítem 2.4	11	11 %	14	14 %	70	72 %	2	2 %

Fuente: elaboración propia.

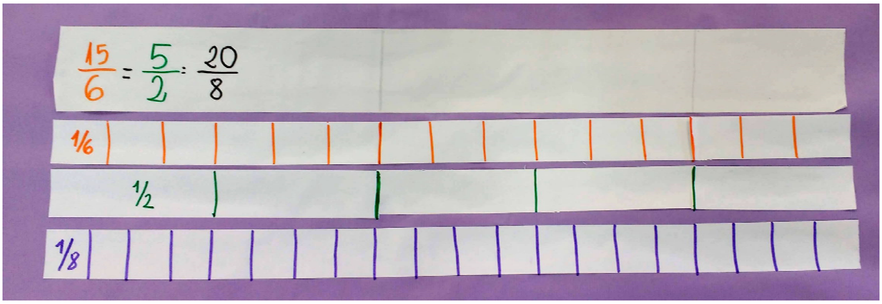
4.2. Equivalencia y orden

Aunque las primeras sesiones se centran esencialmente en la construcción de significado, las actividades promueven la aparición de los primeros debates en torno al concepto de equivalencia.

En concreto, en la segunda sesión se propuso una actividad de construcción en la que la medida proporcionada por el profesorado estaba expresada mediante una fracción reducible. En general, los equipos no reflexionaron sobre este hecho (a pesar de que tienen conocimientos previos sobre fracciones) y construyeron las tiras de papel utilizando la subunidad expresada en el enunciado. Por ejemplo, si el enunciado pedía construir una tira de 18/4 u, los equipos lo hicieron empleando piezas de cuarto de unidad (y no nueve piezas de media unidad). Tras la construcción, los equipos debían intercambiarse las tiras (en cada equipo se había solicitado una medida diferente) y calcular la medida de la tira construida por el equipo vecino. En la actividad de cálculo, generalmente, los alumnos dieron con la medida expresada por la fracción irreducible. Al comunicar el resultado a los "constructores" se generaron discusiones sobre la corrección de la medida hecha.

Estos debates se aprovecharon por los profesores para generar un mural en el aula, de forma previa a la institucionalización del concepto de fracción equivalente, en el que se mostraba una misma tira que se había medido con subunidades de diferente tamaño (ver **FIGURA 3**).

FIGURA 3. *Detalle del mural construido en uno de los grupos a partir de los debates generados en la sesión de construcción.*



Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, se dedican dos sesiones a trabajar el concepto de equivalencia. Para ello se proponen actividades en las que se "parten" las subunidades, pero la longitud total del objeto que se mide no cambia, o en las que las subunidades se "agrupan" convenientemente para medir un objeto con subunidades de mayor tamaño. Tras estas actividades se propone al alumnado que proponga técnicas para encontrar fracciones "diferentes" pero que expresen la misma longitud. De esta forma, nos acercamos al concepto de equivalencia y fracción irreducible y a las técnicas de amplificación y simplificación de fracciones.

Tras la equivalencia se introducen actividades para trabajar el orden entre fracciones mediante contextos en los que hay que ordenar de mayor a menor longitud unas tiras dadas. Aparecen tres técnicas generales para ordenar las fracciones: representar gráficamente para visualizar qué tira es más larga, expresar en el mismo tipo de subunidades mediante equivalencia para ver qué tira está cubierta por un mayor número de subunidades (poner común denominador) y expresar mediante equivalencia con fracciones que tienen el mismo número de subunidades para decidir comparando el tamaño de la subunidad cuál de las tiras es mayor (poner común numerador).

A partir de estas técnicas se proponen diferentes actividades y se reflexiona sobre cuál de las técnicas puede ser más eficiente en cada caso (ver **FIGURA 4**), conectando también así con el pensamiento computacional.

FIGURA 4. Algunas actividades de ordenación de fracciones en la secuencia.

[3.1] Ordena de más corta a más larga las medidas de los siguientes papiros, explica tu respuesta:

$$\frac{3}{4}\,Bu,\quad \frac{7}{4}\,Bu,\quad \frac{6}{4}\,Bu$$

[3.2] Ordena de más corta a más larga las medidas de los siguientes papiros, explica tu respuesta:

$$\frac{3}{4}\,Bu,\quad \frac{3}{7}\,Bu,\quad \frac{3}{5}\,Bu$$

[3.2] Ordena de más corta a más larga las medidas de los siguientes papiros, explica tu respuesta:

$$\frac{3}{7}\,Bu,\quad \frac{11}{6}\,Bu,\quad \frac{6}{5}\,Bu$$

Fuente: elaboración propia.

Además de las técnicas generales, en determinadas actividades (como la 3.2 que se observa en la **FIGURA 4**) también se realizan ordenaciones mediante otros argumentos que ponen en juego el sentido numérico del alumnado. Otro ejemplo, lo podemos observar en el ítem de una de las pruebas escritas de evaluación que se realizaron que se presenta en la **FIGURA 5**.

FIGURA 5. Pregunta para valorar la adquisición del sentido numérico alrededor del concepto de orden de fracciones.

[2.2] Dadas las fracciones $\frac{175}{53}$ $\frac{91}{101}$ $\frac{43}{41}$, el orden correcto es...

a) ... $\frac{175}{53} < \frac{91}{101} < \frac{43}{41}$.

b) ... $\frac{91}{101} < \frac{43}{41} < \frac{175}{53}$.

c) ... $\frac{91}{101} < \frac{175}{53} < \frac{43}{41}$.

d) ... $\frac{43}{41} < \frac{91}{101} < \frac{175}{53}$.

Fuente: elaboración propia.

En este ítem, ningún alumno empleó una técnica numérica y el 62 % de los 97 alumnos contestaron correctamente empleando argumentos del modelo de medida.

4.3. ACTIVIDADES DE TIPO *UP AND D□WN* Y CONEXIÓN CON EL SIGNIFICADO DE OPERADOR

Antes de avanzar hacia las operaciones con fracciones, se decidió que la secuencia didáctica debía seguir ahondando en los significados y diferentes subconstructos de la fracción. De este modo se introdujeron actividades poco frecuentes en las propuestas tradicionales para trabajar la fracción (Domenech y Martínez-Juste, 2019). Se trata de actividades de tipo *up and down*.

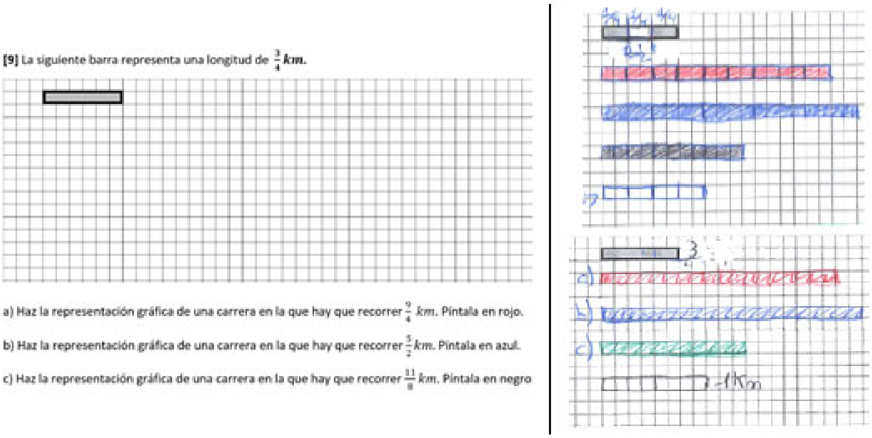
En este tipo de actividades al alumnado se le solicita representar o construir un cierto objeto con una medida dada en forma de fracción, pero en este caso no se proporcionan objetos unidad (o su representación). En vez de ello se les proporciona un objeto (o su representación) informando de la medida en forma de fracción que tiene dicho objeto.

Buforn y otros (2018) caracterizan de la siguiente manera el razonamiento que debe ponerse en juego en este tipo de actividades:

> […] implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) con la idea de fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa y se manifiesta en las actividades de representar fracciones a partir de otra fracción.

Un ejemplo de este tipo de actividad lo podemos observar en la parte izquierda de la **FIGURA 6**. En ella se proporciona la representación de una longitud de 3/4 km y se pide al alumnado representar 9/4 km, 5/2 km, 11/8 km. Aunque no se trata de la primera situación de este tipo que se presenta al alumnado durante la secuencia, cabe destacar que el trabajo previo con la construcción de significado, con las representaciones gráficas y con las tareas de medida y construcción utilizando dichas representaciones, permite al alumnado afrontar con éxito estas tareas poco convencionales. Por ejemplo, en la actividad que se muestra en la **FIGURA 6**, un 68 % del alumnado contestó correctamente al apartado a) y un 53 % resolvió correctamente los tres apartados del problema.

***FIGURA 6.** Problema que pone en juego el razonamiento de tipo up and down (izquierda) y dos respuestas de los alumnos durante la implementación (derecha).*



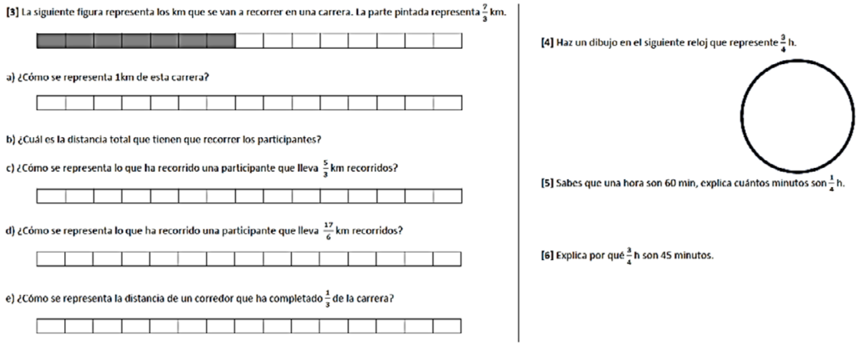
Fuente: elaboración propia.

En la parte derecha de la **FIGURA 6**, observamos dos respuestas correctas al problema de razonamiento *up and down.* Vemos cómo en ambas los estudiantes han construido de forma previa la representación gráfica de la unidad para después construir las representaciones que se solicitaban.

Durante la propuesta el alumnado se enfrenta a múltiples tareas de este tipo y, además, se aprovecharon las actividades propuestas para comenzar a conectar con el significado de operador de la fracción.

Un ejemplo de esta conexión lo vemos en el "problema [3]" en la parte izquierda de la **FIGURA 7**. En dicho problema se representa una carrera y se sombre parte de dicha carrera proporcionando como dato los kilómetros que representa esa parte sombreada. A partir de dicha información los tres primeros apartados se construyen como andamiaje para afrontar la actividad *up and down* que propone el cuarto apartado. Sin embargo, en el último apartado, la fracción proporcionada como dato cambia de referente (o de unidad) no proporcionando una medida en kilómetros, sino que enuncia como parte del total de la carrera y se pide su equivalencia en kilómetros. La resolución de los apartados anteriores y la representación gráfica ayudan al alumnado a poder resolver la tarea.

__FIGURA 7.__ Problemas para conectar los significados de medida y de operador en la secuencia didáctica.



Fuente: elaboración propia.

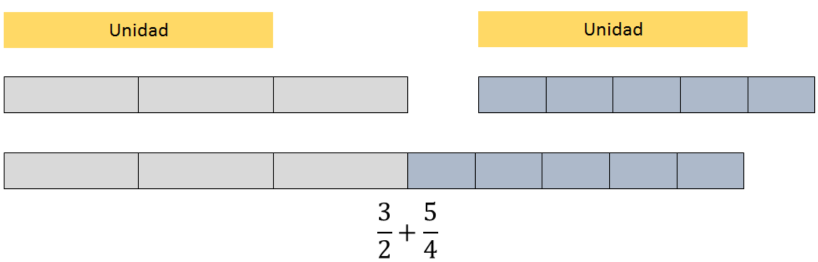
Otros ejemplos de conexión entre el significado de medida y de operador los observamos en la parte derecha de la **FIGURA 7**. El alumnado ya acostumbrado al significado de medida trabaja cómodamente con las representaciones simbólicas con la magnitud tiempo del tipo 3/4 h. Así apoyándose en la representación gráfica son capaces de realizar la conversión a minutos de esa medida de tiempo, trabajando de esta forma la obtención contextualizada de 3/4 de 60, sin necesidad de introducir técnicas específicas de cálculo para la fracción con significado de operador de forma previa.

En la prueba escrita de evaluación final un 72 % del alumnado participante fue capaz de cambiar entre la representación en forma de fracción de una cantidad de tiempo medida en horas y el equivalente de dicha cantidad representado por un número natural de minutos. En este sentido, también es destacable el alto porcentaje de acierto en esta prueba final que se obtvo en problemas "clásicos" de fracción con significado de operador, incluso en los más complicados. Por ejemplo, en el problema "*He gastado en comer los □/□del dinero que tenía. SI la comida me ha costado □□€. ¿Cuánto dinero tenía?*", en el que conocida la parte debe calcularse el total, el porcentaje de acierto fue del 77 %.

4.4. Situaciones aditivas

La secuencia continúa con la introducción de las situaciones aditivas, tanto formales como concretas. Para ello, no se proporciona un algoritmo de suma (o resta de fracciones) sino que las actividades contextualizadas alrededor del significado de medida de la fracción pretenden guiar hacia la construcción de dicho algoritmo. En este sentido se trabaja el significado de la suma de fracciones como la agregación de dos cantidades de magnitud (en este caso longitud). Así se proporcionan situaciones como la que se esquematiza en la **FIGURA 8**. Es decir, se propone al alumnado una situación en la que hay que unir dos tiras por sus extremos, se proporciona la medida en forma de fracción de cada una de ellas y se solicita determinar cuánto mide la tira resultante.

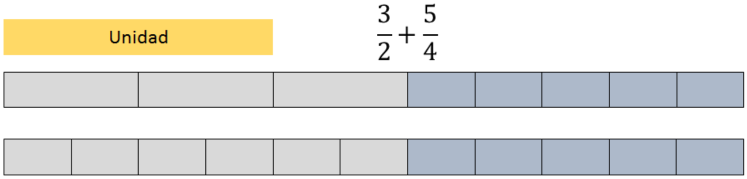
FIGURA 8. *Esquema de la situación introductoria para la suma de fracciones.*



Fuente: elaboración propia.

Por un lado, el resultado de la acción viene simbolizado por la suma de las fracciones que representan la medida de cada uno de los objetos iniciales. Por otro lado, para expresar dicha medida mediante una fracción deben tener el nuevo objeto medido en el mismo tipo de subunidades para determinar cuántas de esas subunidades hacen falta para cubrir dicho objeto. Aparece así la técnica de expresar las fracciones en el mismo tipo de subunidades (poner común denominador) y recontar las subunidades necesarias (sumar numeradores). La representación gráfica de esta técnica puede observarse en el esquema presentado en la **FIGURA 9**.

FIGURA 9. *Esquema de resolución de la situación introductoria para la suma de fracciones.*



$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}+\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$$

Fuente: elaboración propia.

Sobre las diferentes resoluciones que aparecieron alrededor de esta tarea, resaltamos que en el enfoque a través de la resolución de problemas, el éxito de las situaciones iniciales no se mide según el éxito global en la tarea, sino si tras los debates posteriores a su resolución, o intento de la misma. Así, los diferentes acercamientos permiten construir una adecuada institucionalización. Es decir, tras la puesta en común, se debaten planteamientos correctos e incorrectos, para hablar de por qué sí o por qué no la técnica empleada ha permitido dar una respuesta correcta.

En este sentido, en la tarea de la suma suelen aparecer "estrategias incorrectas" como es la suma de numeradores y denominadores, o aquellas en las que solo se indica el número de piezas que cubren el objeto (sumando los numeradores sin poner común denominador los numeradores y dar esa suma como respuesta), y diferentes estrategias correctas que pasan desde las óptimas (partir todo en cuartos para medir) o buscar subunidades más pequeñas cuando representan el gráfico en una hoja cuadriculada. La riqueza de la situación y de las producciones que genera el alumnado se mide en términos de oportunidad para construir el conocimiento. Si solo aparecen soluciones con denominador 1/4 puede llevar a pensar a alguna parte del alumnado que siempre hay que medir en el tamaño que indica el denominador mayor (o la subunidad más pequeña), así si aparecen soluciones no óptimas, en este caso con denominador 1/8, por ejemplo, el debate es más rico. Además, la presencia de soluciones incorrectas se puede aprovechar para debatir, por qué, por ejemplo, para comparar fracciones puede ser útil poner común numerador, sin embargo, para sumar no lo es.

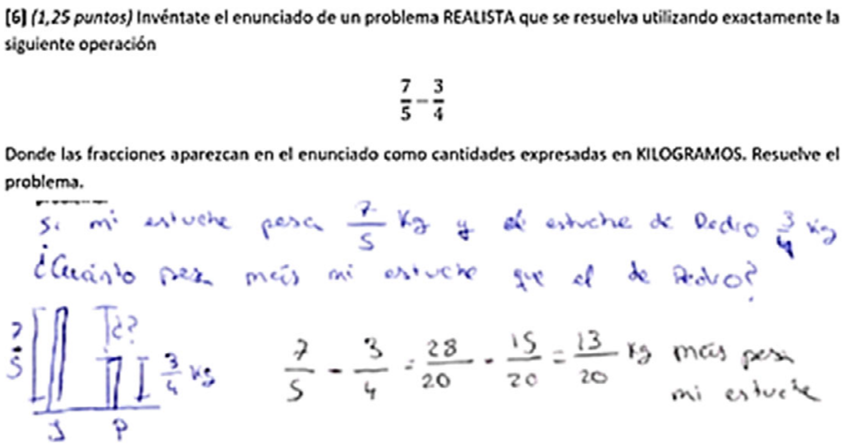
Tras la introducción de la suma se trabaja la resta de forma similar y se refuerzan las técnicas para realizar de forma óptima operaciones aditivo-concretas con fracciones.

En esta fase de la propuesta también se trabaja la densidad de los racionales. La situación introductoria se contextualiza reflexionando sobre si siempre puedo encontrar un palo de longitud que sea más largo que un palo de longitud dada y más corto que otro cuya longitud también conocemos. De esta forma, la continuidad de la manitud longitud nos ayuda a introducir el concepto de densidad (cuestión muy compleja si se usan modelos discretos del tipo parte-todo). La reflexión inicial sobre la posibilidad de encontrarlo deriva en la búsqueda de una técnica para hacerlo de manera simbólica. Esta técnica pasa por expresar las longitudes conocidas en el mismo tipo de subunidades y, eventualmente, amplificar dichas expresiones simbólicas, para encontrar longitudes intermedias.

Además de las situaciones aditivo-concretas, se trabajan colecciones de problemas contextualizados que repasan las posibles estructuras semánticas de problemas aditivos en una etapa cuando los datos vienen expresados en forma de fracción con significado de medida.

Durante esta fase de la secuencia (y también durante la siguiente al trabajar la situaciones multiplicativas) se incorporan frecuentemente actividades de tipo *problem posing* (Silver, 1994), es decir, el alumnado debe proponer (y eventualmente también resolver) el enunciado de un problema realista que se resuelva mediante una operación entre fracciones que se le proporciona (ver **FIGURA 10**). Se trata de un tipo de tarea abierta, de alta demanda cognitiva, que es habitual en el ejercicio de las matemáticas, que fomenta la creatividad y mejora la actitudes del alumnado.

FIGURA 10. *Problema concreto de estructura Estado-Comparación-Estado propuesto por un alumno.*



[6] ***(1,25 puntos)*** **Invéntate el enunciado de un problema REALISTA que se resuelva utilizando exactamente la siguiente operación**

$$\frac{7}{5}-\frac{3}{4}$$

Donde las fracciones aparezcan en el enunciado como cantidades expresadas en KILOGRAMOS. Resuelve el problema.

Si mi estuche pesa $\frac{7}{5}$ kg y el estuche de Pedro $\frac{3}{4}$ kg ¿Cuánto pesa más mi estuche que el de Pedro?

$\frac{7}{5}-\frac{3}{4}=\frac{28}{20}-\frac{15}{20}=\frac{13}{20}$ kg más pesa mi estuche

Fuente: elaboración propia.

El diseño de este tipo de actividades permite diferentes grados de concreción. Entre las concreciones que pueden darse destacamos las siguientes que están ligadas al trabajo con las fracciones desde el modelo de medida:

1. Determinar el tipo de operación o proporcionar los datos numéricos concretos.
2. Determinar o no el tipo de magnitud que debe estar involucrada en la situación.
3. Determinar o no la unidad a la que deben estar referidas las fracciones.

Como vemos, en el problema de la **FIGURA 10** se especifica la operación concreta que debe modelizar el problema, así como la magnitud y la unidad (peso y kilogramo) a las que están referidas las fracciones. Además, se especifica que el problema debe ser realista. Lejos de suponer una simplificación, las anteriores especificaciones obligan a gestionar el significado de las fracciones involucradas y a poner en juego características del sentido numérico y del sentido de la medida como la estimación de la cantidad de magnitud de los objetos que los alumnos incorporan en el contexto. Así, en la producción que vemos en dicha figura el alumno ha propuesto un contexto realista de estructura semántica Estado-Comparación-Estado. Además vemos que ha utilizado algunos heurísticos para la propuesta de resolución como el gráfico que observamos en la esquina inferior izquierda. A pesar de que propone un buen contexto que puede ser realista, la estimación de la cantidad de magnitud peso del objeto estuche puede parecer excesiva, lo que puede aprovecharse en el debate posterior a la realización de la actividad para estimar el peso en kilogramos de objetos cotidianos.

4.5. Situaciones multiplicativas

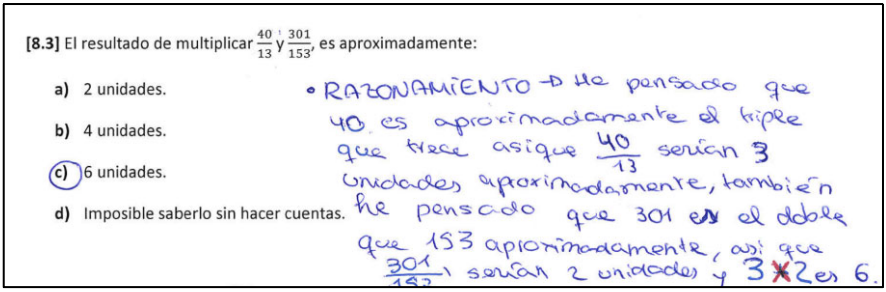
La multiplicación y división de fracciones se trabaja de manera informal en primero, ya que se estimó conveniente profundizar en su significado en la secuencia para 2º de ESO. En 2º de ESO se trabaja un modelo de medida alrededor de la magnitud área, realizando medidas directas de “manteles” (rectángulos proporcionados por el profesor con una medida concreta) con unidad de magnitud cuadrados que representan “servilletas” (cuadrados de papel cuyo lado mide el largo de un DIN-A4).

Para acercarnos a la multiplicación se propone calcular el área de un rectángulo mediante dos técnicas diferentes que deben dar, necesariamente, el mismo resultado. Por un lado una medida directa cubriendo con subunidades, y por otro con una técnica indirecta como resultado de la multiplicación de las dimensiones del rectángulo.

Como comentamos en el apartado anterior, además de las situaciones multiplicativo-formales, se trabaja de forma exhaustiva la resolución de situaciones multiplicativo-concretas diseñadas a partir de las diferentes estructuras semánticas de problemas en una etapa.

A pesar de que, como hemos dicho, en 1º de ESO, no se profundiza en el significado de estas situaciones, realizando un acercamiento informal, el trabajo previo en toda la secuencia permite el desarrollo de habilidades propias del sentido numérico alrededor de la multiplicación y división de fracciones. Por ejemplo, en la **FIGURA 11** observamos el razonamiento de una alumna para aproximar el resultado de la multiplicación de dos fracciones “complejas” sin necesidad de realizar cálculos o desplegar técnicas numéricas específicas.

FIGURA 11. *Argumentación de un alumno en una pregunta de respuesta múltiple para evaluar la adquisición del sentido numérico alrededor de una situación multiplicativo-concreta con fracciones.*



[8.3] El resultado de multiplicar $\frac{40}{13}$ y $\frac{301}{153}$, es aproximadamente:

a) 2 unidades.

b) 4 unidades.

c) 6 unidades.

d) Imposible saberlo sin hacer cuentas.

• RAZONAMIENTO → He pensado que 40 es aproximadamente el triple que trece asique $\frac{40}{13}$ serían 3 unidades aproximadamente, también he pensado que 301 es el doble que 153 aproximadamente, así que $\frac{301}{153}$ serán 2 unidades y 3×2 es 6.

Fuente: elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo mostramos una secuencia para trabajar la fracción en los primeros cursos de secundaria en la que se trabajan las conexiones entre diferentes sentidos matemáticos, especialmente entre el sentido de la medida y el sentido numérico. El alumnado que ha seguido la propuesta se muestra competente para abordar enunciados tradicionales sobre fracciones a la vez que es capaz de resolver una mayor variedad de situaciones que no aparecen en la práctica habitual.

Además, esta secuencia no ha sido elaborada por teóricos de forma ajena a la práctica. Todo lo contrario, ha sido elaborada por prácticos, profesores de secundaria, con el apoyo de docentes universitarios. Lo que ha supuesto una oportunidad de desarrollo profesional para los primeros y una oportunidad de para la transferencia de conocimiento para los segundos.

Uno de los mayores problemas de la formación continua para profesores es la ausencia casi absoluta de formación específica en didáctica de las matemáticas. Hecho que puede extrapolarse a otras especialidades. La creación de un grupo de trabajo colaborativo entre docentes de secundaria en activo y docentes universitarios, para diseñar unidades didácticas y experimentarlas mediante una metodología consolidada en Ciencias Sociales, supone una oportunidad inmejorable para la mejora y la innovación docente y para acercar teoría y práctica en el ámbito educativo.

Queremos destacar los beneficios que la observación de aula entre docentes tiene para el desarrollo profesional. Observar cómo trabaja un compañero y, también, dejarse observar con el objetivo de analizar nuestras clases; comentar, definir y redefinir desde ese análisis las actividades planteadas y las estrategias para introducir los conceptos, supone una experiencia extremadamente enriquecedora. Esta forma de trabajo promueve el esfuerzo individual, fomenta una actitud de apertura hacia otras formas de pensamiento y potencia las habilidades, destrezas y conocimientos de cada profesor implicado mejorando claramente su práctica docente. Aunque numerosos estudios, como el de García y otros (2019), describen estas ventajas para la formación inicial de docentes, queremos destacar los enormes beneficios que tiene también en la formación continua de docentes "experimentados".

Las oportunidades que ofrecen los nuevos desarrollos curriculares para el desarrollo profesional de los docentes son claras. Ahora bien, serán necesarias acciones formativas ambiciosas que trasciendan los habituales cursos y se integren con la práctica de aula.

6. AGRADECIMIENTOS/APOYOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, con apoyo del Grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

7. REFERENCIAS

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2nd ed). Continuum.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, *98*, 11-21.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa*, *23*(76), 229-251.

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida*. Síntesis.

Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2019). Actividades de razonamiento «up and down» para trabajar las fracciones en 1. º de ESO. *Entorno Abierto*, *29*, 13-18.

Elliot, J. (2015). Lesson and Learning study and the idea of the teacher as a researcher. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *29*(3), 29-46.

Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente* [Tesis Doctoral]. Universidad de Zaragoza.

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M. y Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las ciencias*, *37*(1), 137-156.

Kieren, T. E. (1980). The rational numbers construct. Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-150). ERIC/SMEAC.

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational researcher*, *35*(3), 3-14.

Martínez-Juste, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. *Libro de actas de CIMIE19: AMIE*. AMIE.

Martínez-Juste, S., & Domenech, A. (2019). Lesson study para innovar en matemáticas. *Entorno abierto*, *30*, 7-10.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Ono, Y., & Ferreira, J. (2010). A case study of continuing teacher professional development through lesson study in South Africa. *South African Journal of Education*, *30*(1).

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y Hattrup, R. A., *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1–51). Lawrence Erlbaum Associates.