Volando voy (Graphing Bee): final de la XXX Olimpíada Matemática de 2.º ESO

por

Pablo Beltrán-Pellicer y J. M.ª Muñoz-Escolano

(Universidad de Zaragoza)

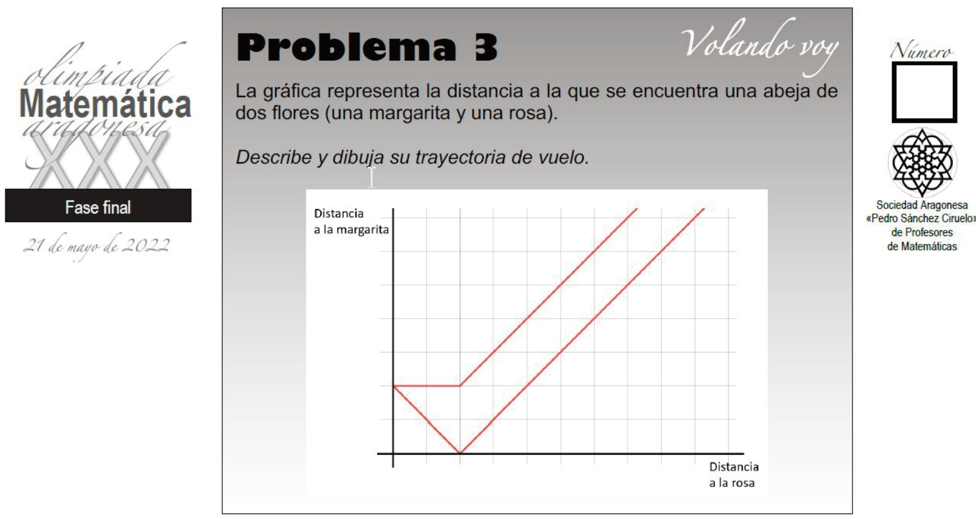

Figura 1. Enunciado del problema

Como puede apreciarse, el enunciado del tercer problema de la final de la XXX Olimpíada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO nos remite a la interpretación de gráficas. Sin embargo, no se trata de la gráfica de una función, aunque en torno a este problema puedan ponerse sobre la mesa cuestiones específicas de funciones.

Para los lectores no familiarizados con la Olimpíada, diremos que se trata una actividad para alumnado de 2.º curso de Educación Secundaria Obligatoria (mayoritariamente de 13-14 años), aunque también acuden algunos estudiantes de 1.º de ESO (Goñi, 2022). Por lo tanto, considerando el currículo de Matemáticas, presumiblemente, los participantes han tenido contacto con tareas en torno a la interpretación de gráficas, así como a aspectos relacionados con las funciones.

En un análisis a priori de la tarea que proponemos con este problema, identificaríamos distintos componentes: interpretación de los lugares geométricos que señalan los puntos donde la gráfica corta a los ejes y los diferentes segmentos: el que está sobre la bisectriz del cuadrante, el paralelo al eje de «distancia a la rosa», el que va desde un punto al otro de corte con los ejes y finalmente, el segmento paralelo a la bisectriz del primer cuadrante. Esto podría llevar a pensar que la tarea es muy compleja y que está alejada de lo que sabe hacer un alumno de 2.º de ESO. Los resultados obtenidos confirman esta hipótesis en gran medida, ya que únicamente tres participantes fueron capaces de resolverla de forma plenamente satisfactoria, aunque dicha hipótesis no se confirma de manera absoluta, puesto que muchos de los participantes identificaron correctamente varias de las componentes de este problema y apenas se registraron respuestas en blanco. Por lo tanto, con mayor o menor éxito, la mayoría de los participantes abordaron la resolución de esta tarea.

Ahora bien, ¿cuál es el origen de la dificultad? ¿Podría ser la forma en que se abordan normalmente estas cuestiones? Autores como Janvier (1998) o Leinhardt y otros (1990) señalan diversas dificultades en torno a funciones e interpretación de gráficas. Por ejemplo, que cuando se emplean contextos, suele ocurrir que se elige el tiempo como variable independiente, por lo que se crea la concepción de que una gráfica es una especie de crónica. Así mismo, materiales como los del Shell Centre (Swan, 1990) plantean actividades de interpretación en las que las variables se eligen de tal manera que exigen una mayor reflexión sobre los convenios de los ejes y sobre lo que significa tanto una gráfica, como una función como una relación entre dos magnitudes que varían. De hecho, incluyen relaciones no funcionales, como la del problema que nos ocupa, claramente inspirada en ellos.

Gran parte de los participantes (76 de 109) interpretan la gráfica del enunciado como el dibujo de la trayectoria de vuelo (figura 2), bien sea de manera parcial o completa, en lugar de como una gráfica que expresa la relación entre dos magnitudes que covarían.

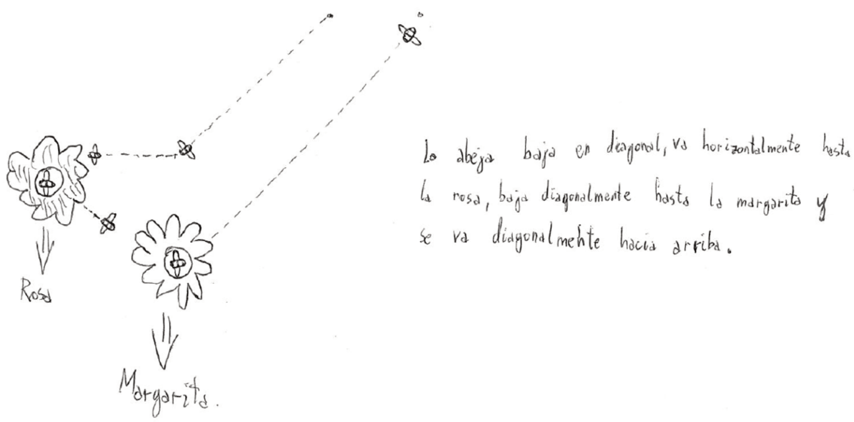

Figura 2. Interpretación de la gráfica como el dibujo de la trayectoria de vuelo

Luego nos encontramos con algunas resoluciones (3 de 109) que dan a entender que el participante se percata de que la gráfica indica la forma en que varían la distancia a la rosa y la distancia a la margarita, pero que no terminan de dar con la trayectoria. Por ejemplo, en la figura 3 observamos cómo se dice que hay un tramo paralelo al eje de abscisas y que esto significa que se mantiene la distancia a la margarita. Sin embargo, no lo relaciona con que la abeja estaría describiendo un arco de circunferencia.

Al principio de la trayectoria se encuentra a la misma distancia de ambas flores más tarde se acerca a una y después a la otra y por último sigue su recorrido alejandose de las dos flores.
En la gráfica hay un tramo que tiene una linea recta paralela al eje de las x que nos indica que ha estado a la misma distancia de la margarita mientras que la de la rosa ha variado.

Figura 3. Identificación de la relación entre las magnitudes distancia a la rosa y distancia a la margarita

Otros participantes (13 de 109) añaden elementos gráficos o descriptivos concretos, pero sin llegar a explicar de forma satisfactoria la trayectoria completa. Así, en la figura 4 vemos cómo el participante identifica la mediatriz (por el segmento de la gráfica correspondiente a la bisectriz del primer cuadrante), pero luego no interpreta correctamente el resto.

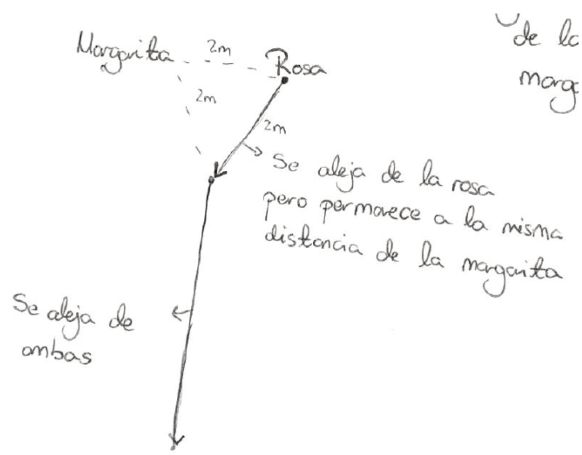

Figura 4. Identificación del segmento correspondiente a la mediatriz

En cuanto a las resoluciones que llegaron a interpretar correctamente casi todos los elementos, nos encontramos con lo que, cariñosamente, mientras corregíamos, denominábamos «la bota» (11 de 109). Son trayectorias como la que mostramos en la figura 5, donde se interpreta todo menos el segmento correspondiente a la recta $y=x-2$ en la gráfica. La trayectoria debería seguir la recta dada por los puntos M y R, pero, quizá, el hecho de que la recta $y=x-2$ y la recta $y=x$ son paralelas en la gráfica lleva a pensar que la trayectoria también ha de serlo.

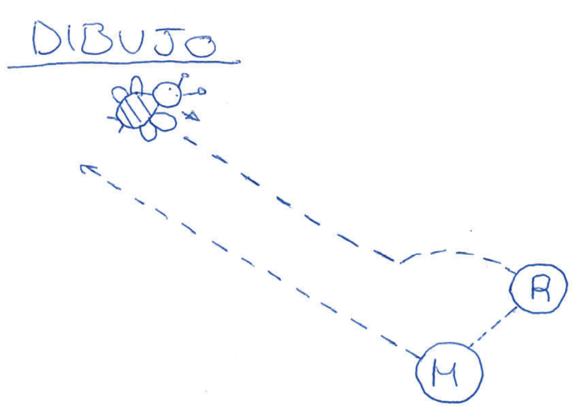

Figura 5. Resolución correcta, salvo en la interpretación del segmento de la recta $y=x-2$ en la gráfica

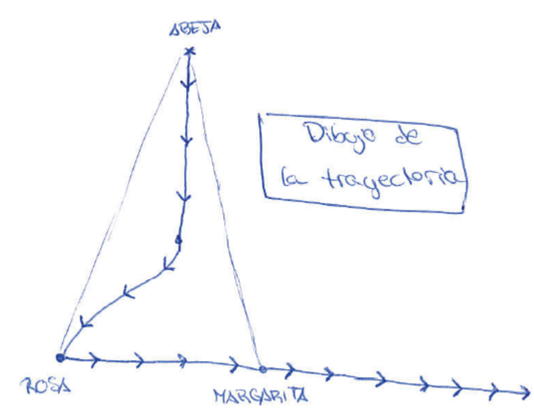

Figura 6. Dibujo de la trayectoria de una de las resoluciones correctas

Finalmente, tres participantes interpretaron correctamente todos los elementos (figura 6). El problema, en realidad, es muy abierto. Alguno de los participantes trató de razonar una trayectoria en tres dimensiones, con la abeja acercándose «desde arriba» y saliendo luego paralela al suelo. En efecto, si no nos restringimos a una representación plana del problema, las trayectorias posibles son infinitas. Por ejemplo, el segmento de la bisectriz del primer cuadrante señala que sus puntos están a la misma distancia de la rosa que de la margarita. En el espacio tridimensional, esto significa que la abeja está volando en el plano perpendicular al segmento que une la margarita y la rosa que pasa por su punto medio, por lo que, todas las rectas (y curvas) contenidas en ese plano cumplen esa condición y podían ser una parte de la trayectoria.

Ahora bien, tampoco sabemos cómo se recorre la gráfica, pues desconocemos la parametrización según el tiempo. Aunque también hay infinitas soluciones, si consideramos que la abeja no vuela «hacia atrás» en ningún momento, podemos pensar que hay dos posibles soluciones dependiendo de cómo recorramos la gráfica. En la primera, la abeja se acerca a las flores de manera que vuela manteniendo la misma distancia a la rosa que a la margarita (va por la mediatriz del segmento definido por las flores). Cuando se encuentra a una distancia igual a la distancia entre la rosa y la margarita, entonces vuela aproximándose a la rosa, pero manteniendo esa distancia con la margarita (va por el arco de la circunferencia con radio igual a la distancia entre la rosa y la margarita). Una vez liba el néctar de la rosa, se dirige en línea recta en dirección a la margarita (se aleja de la rosa y se acerca a la margarita). Después de pasar por la margarita o libar su néctar sigue en la misma dirección con la que se había aproximado a la margarita (figura 7). La otra solución consiste en el recorrido inverso; es decir, acercarse primero a la margarita.

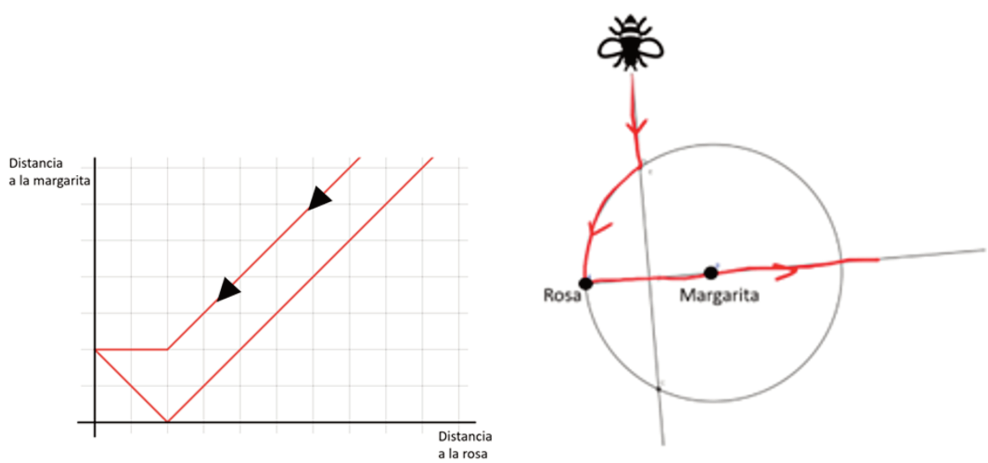

Figura 7. Una posible solución

Nos dejamos en el tintero cómo abordar, en profundidad, este tipo de problemas en el aula. Ahora bien, queremos terminar este artículo con alguna pincelada. De esta manera, por un lado, un posible recorrido didáctico podría consistir en comenzar por el problema inverso. Es decir, proporcionar o describir una trayectoria y que el alumnado deba elaborar la gráfica. Tareas de este estilo se encuentran en el mencionado material del Shell Centre, disponible gratuitamente en la página web del Ministerio de Educación (Swan, 1990). Por otro lado, una vez lanzada la cuestión de, dada la gráfica, describir la trayectoria, quizá sea buena idea prever el andamiaje de proporcionar segmentos aislados más sencillos de interpretar. Por ejemplo, la bisectriz del primer cuadrante o un segmento paralelo a uno de los ejes. Finalmente, sería interesante acompañar estas tareas con otras posteriores donde, empleando algún software, como GeoGebra, el alumnado pudiera indagar de manera dinámica acerca de los lugares geométricos que ocuparía la abeja respecto a la margarita y la rosa a través del arrastre de un punto de la gráfica en el cuadrante y viceversa.

Referencias bibliográficas

Goñi, M. (2022), «XXX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º ESO», *Entorno Abierto*, 47, 1–5.

Janvier, C. (1998), «The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function», *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79-103, <https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)80062-5>.

Leinhardt, G., O. Zaslavsky y M. K. Stein (1990), «Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching», *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64, <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>.

Swan, M. (1990), *El lenguaje de las funciones y gráficas,* Shell Centre for Mathematical Education, <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/d/1065/19/0>.