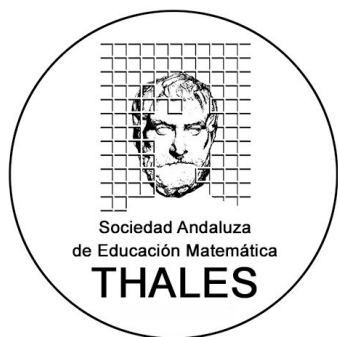




Tú eres el protagonista
de esta historia, elige entre
30 soluciones distintas.



Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza



Universidad
Zaragoza



@pbeltranp
www.tierradenumeros.com

Cocina con Pablo



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Dos prácticas que siguen muy arraigadas

- › Copiar los enunciados (copiar, en general)
- › Sacar a la pizarra



”

Mathematics teachers show a tendency to adopt the same pedagogies they themselves experienced as learners, subconsciously crediting these for their own success, resulting in a general acquiescence to the dominant ideologies.

Wright, P. (2017) Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture & Society*, 25(4), 515-530. DOI: 10.1080/14681366.2017.1285345



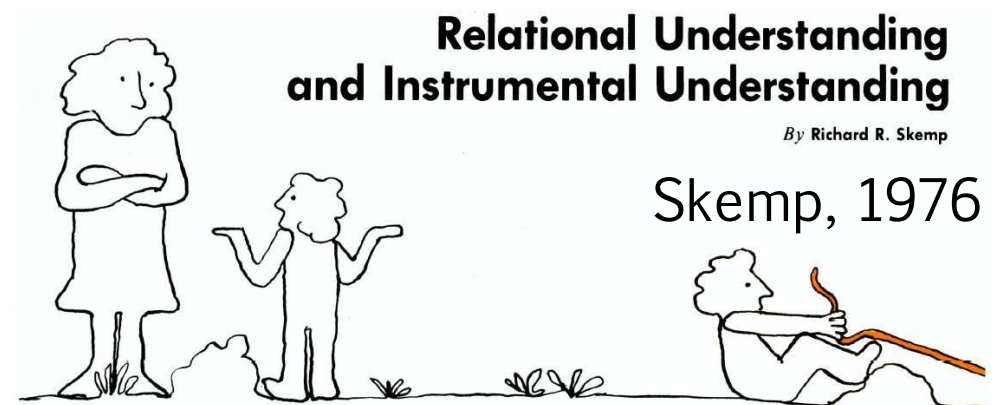
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas de la EGB



Consigna: “Crea una imagen de una clase de matemáticas”

¿Dos asignaturas diferentes bajo el mismo nombre?



2º ESO

FÓRMULA:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La justificación de esta fórmula queda para cursos superiores. Por ahora, conviene que la memorices y que aprendas su manejo como se muestra en los siguientes ejemplos.

El curso superior...

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la x , se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{Soluciones de una ecuación de segundo grado.}$$

El doble signo ($\pm$) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

La raíz cuadrada de la varianza se llama **desviación típica**.

El próximo curso manejarás estos parámetros con soltura. Ahora nos conformamos con hallar sus valores para los datos del ejemplo:

Varianza =

$$= \frac{6^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2}{6} = 16,33$$

Desviación típica =

$$= \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{16,33} = 4,04$$

**¿QUÉ QUEREMOS
QUE APRENDAN?**



¡A RESOLVER PROBLEMAS!



**¿Y QUÉ LES
VAMOS A ENSEÑAR?**



imgflip.com

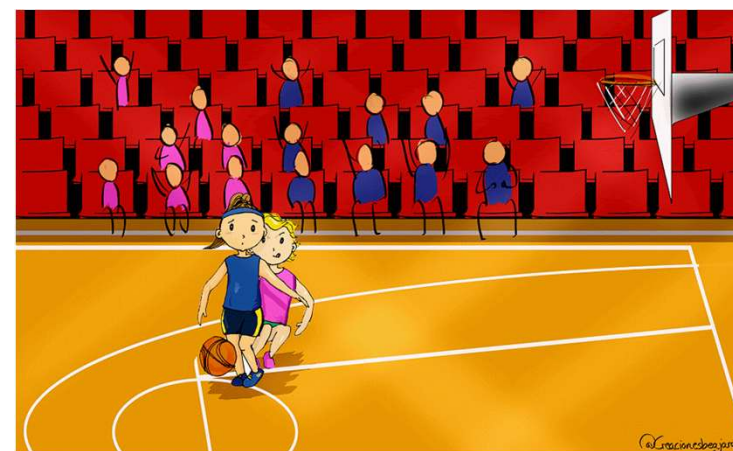
¡A HACER EJERCICIOS!



¿Por qué no así?

Queda un minuto y el entrenador tiene que decidir a qué jugadora sacar. ¿A quién elegirá?

- Si va perdiendo de 8 puntos.
- Si va ganando de 2 puntos.



<https://tierradenumeros.com/post/hilo-medidas-de-dispersion/>

Guías Praxis para el
profesorado de ESO

MATEMÁTICAS
Contenidos, Actividades y Recursos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50

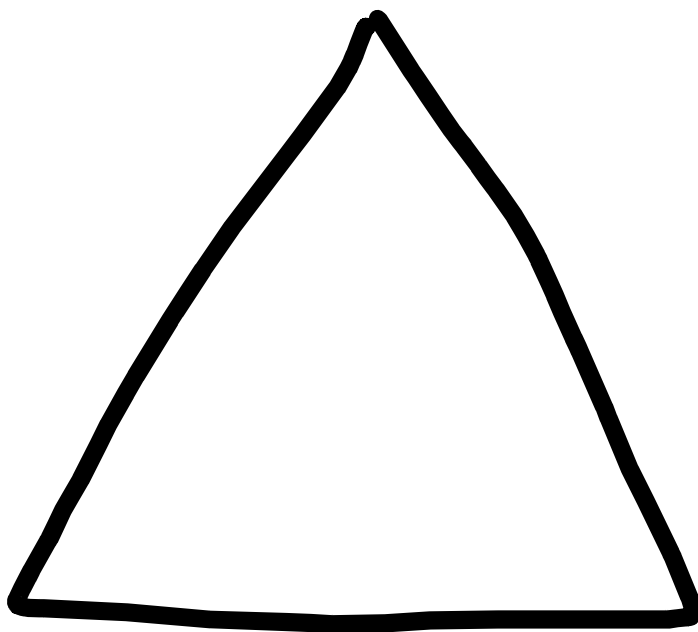
BORRELL, F., POL, A. y SAGUER, E. (1998), «Estadística y probabilidad», en C. Azcárate y J. Deulofeu (1998), Matemáticas ESO, Guías Praxis para el profesorado, Praxis Barcelona.

La suma de los ángulos de un triángulo

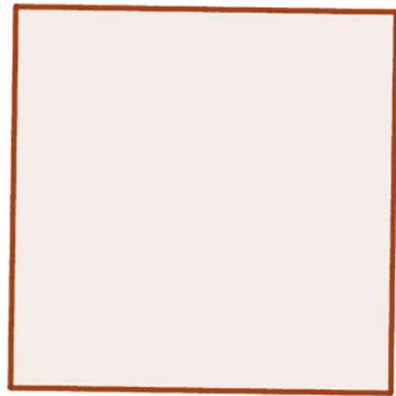


- Si quieres ser instrumental, di que la suma es 180° y pasa a la última página.
- Si quieres ser relacional, pasa a la página siguiente.

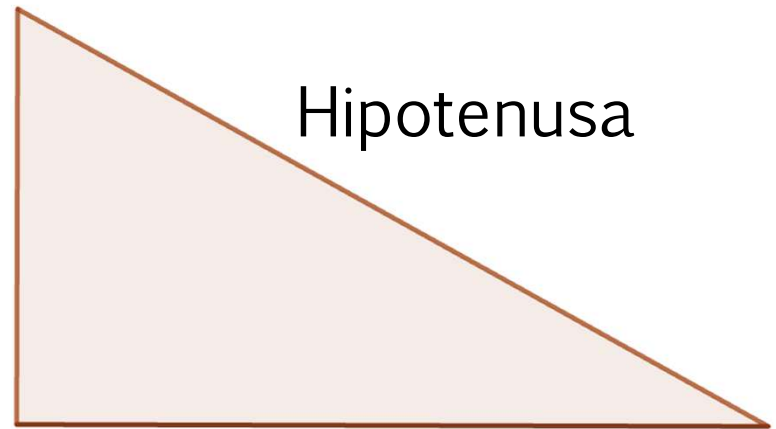
Dibujad un triángulo, el que queráis



¿Así está bien, profe?



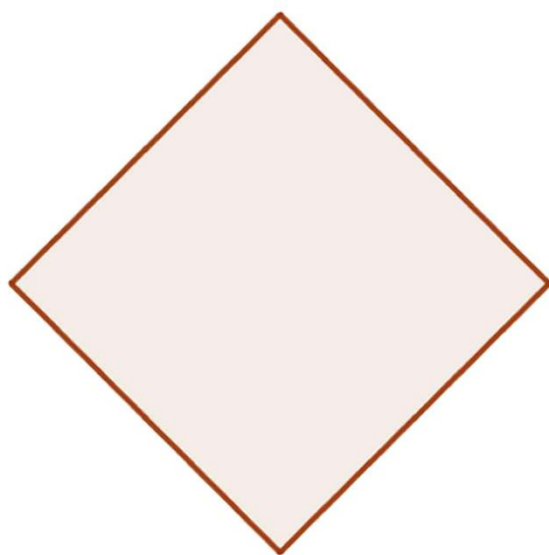
Cuadrado



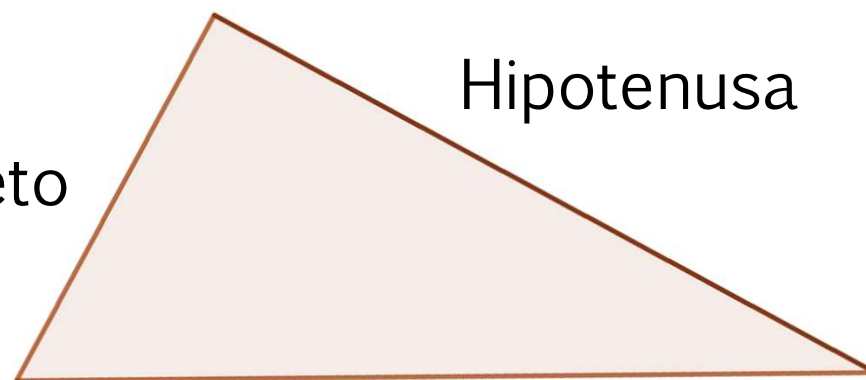
Cateto

Hipotenusa

Cateto



Rombo



Cateto

Hipotenusa

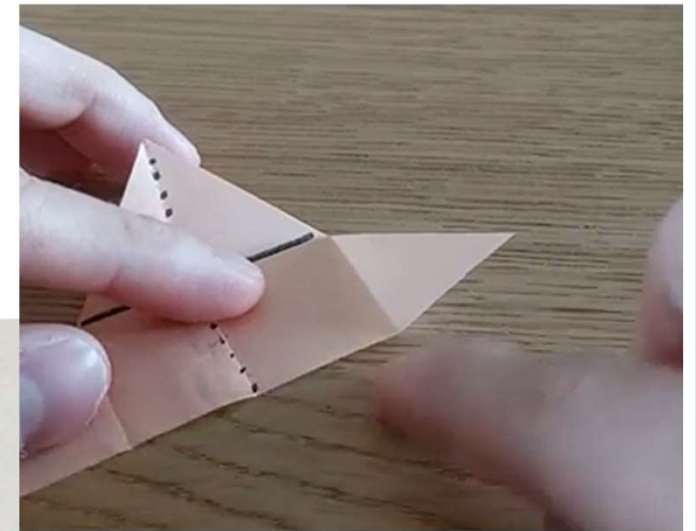
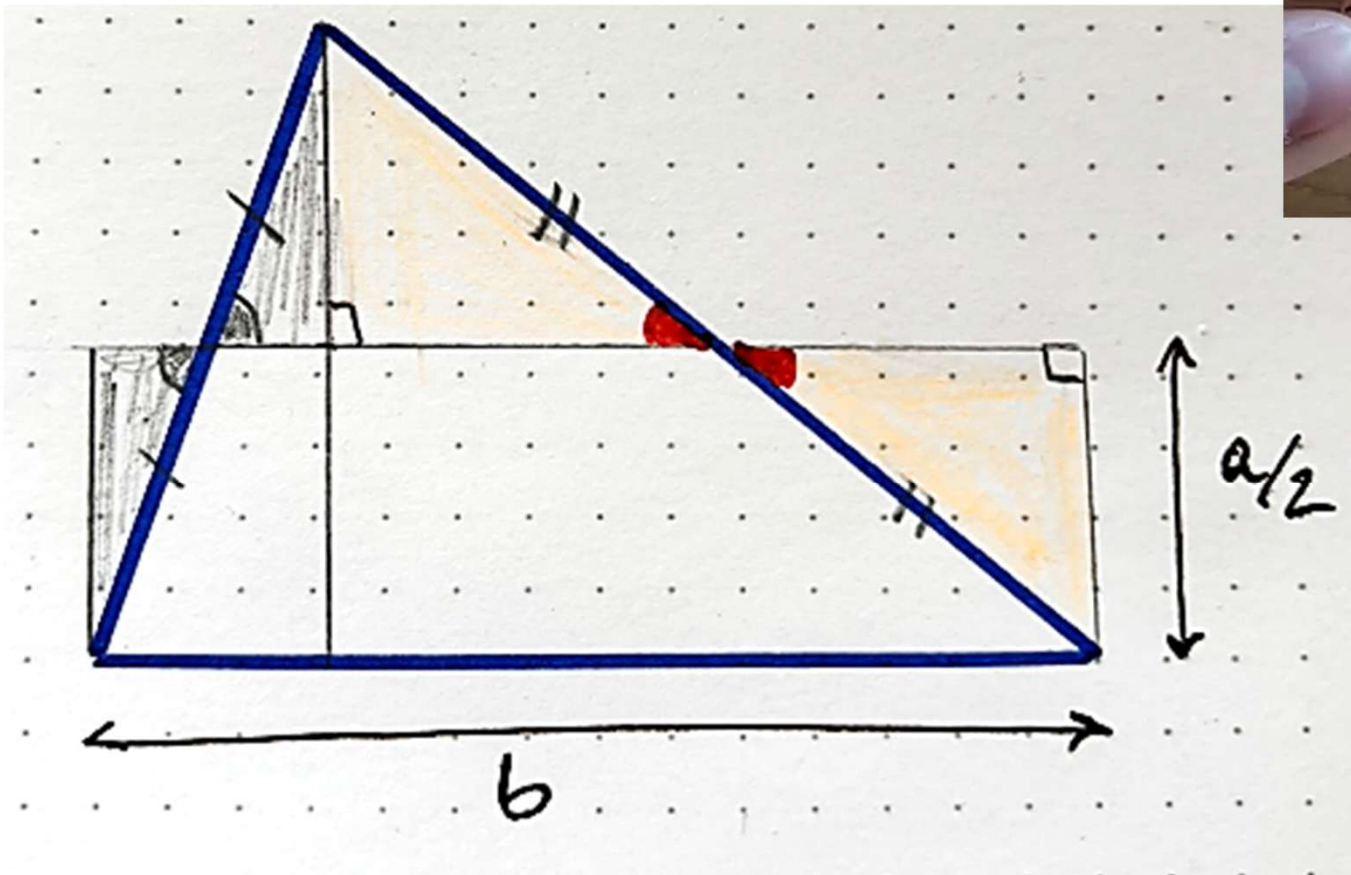
Cateto

¿Qué observas si unes los vértices en un punto, colocando los ángulos lado a lado?



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Sin cortar



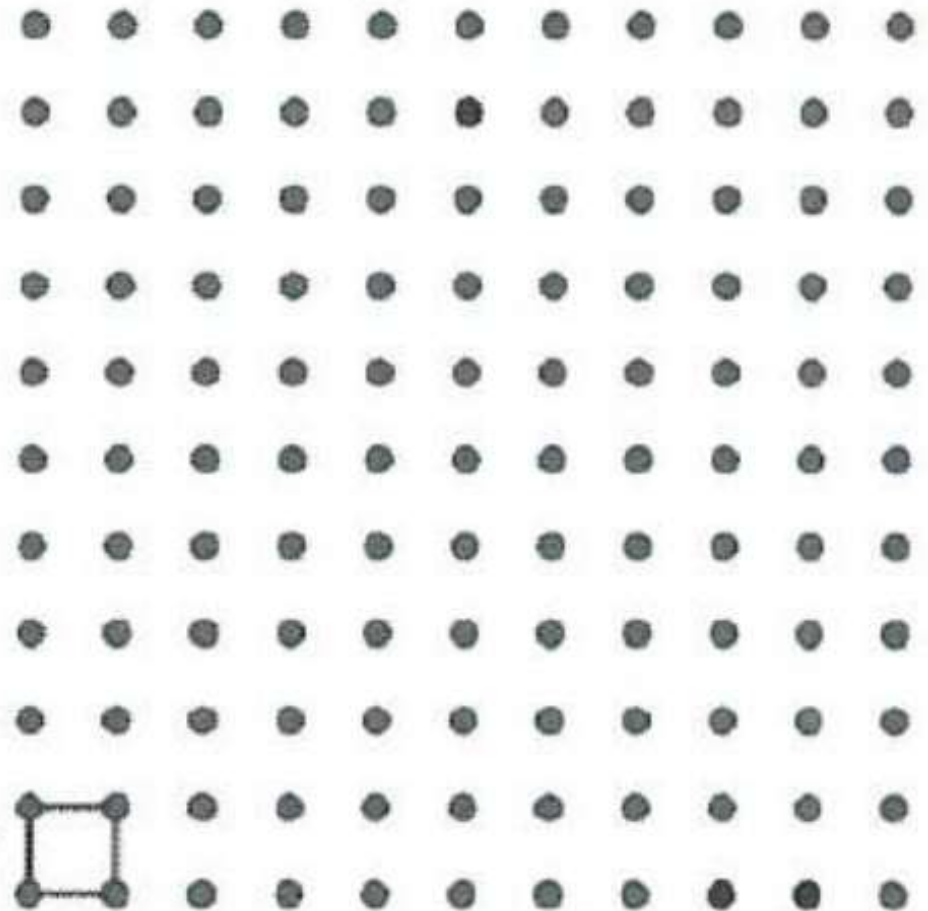
Conexiones: áreas y teorema de Pitágoras



- Si quieres ser instrumental, da las fórmulas de las áreas (y el teorema, cuando toque) y pasa a la última página.
- Si quieres ser relacional, pasa a la página siguiente.

Si es posible, dibuja un cuadrado de área 20 unidades cuadradas en la siguiente trama cuadrada, de tal manera que los vértices del cuadrado caigan en puntos de dicha trama. Justifica tu respuesta, tanto si es posible como si no.

Cuadrado de
área 1 unidad





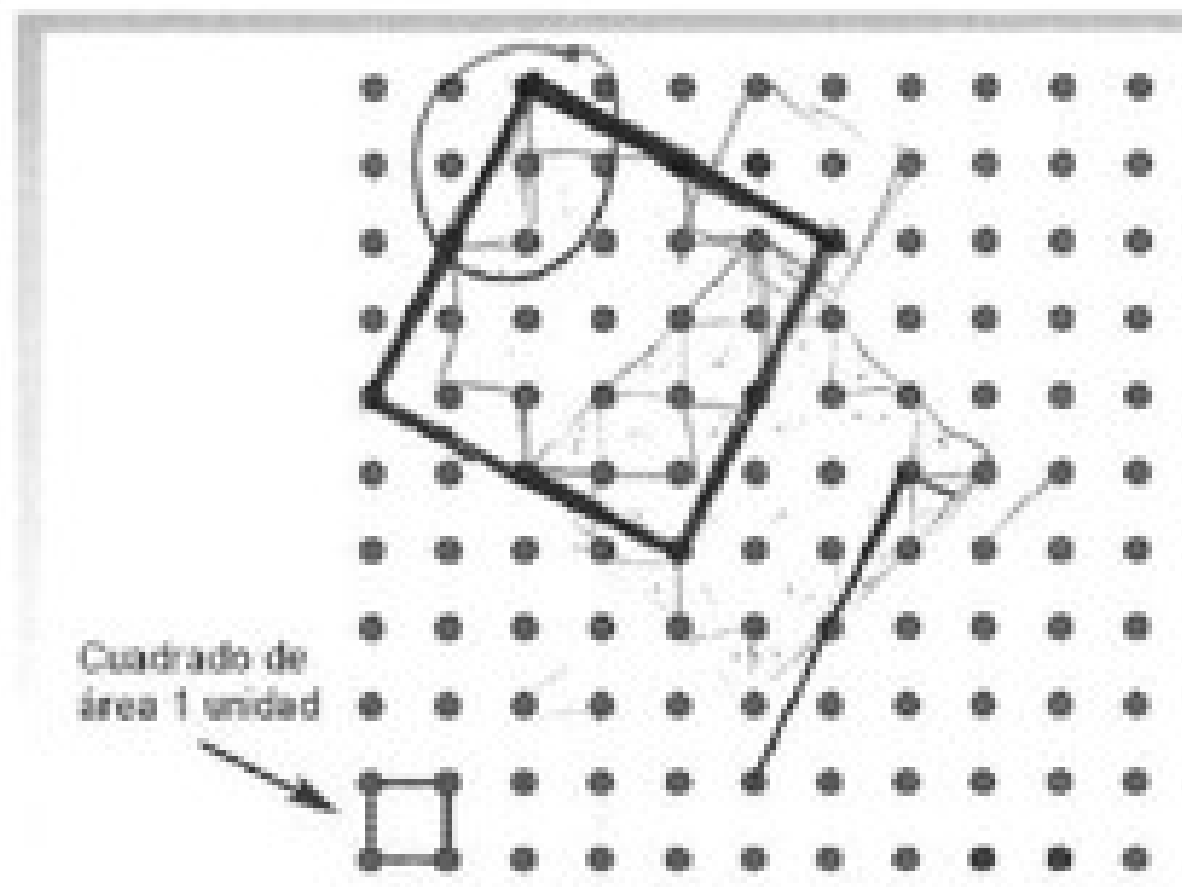
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + 2^2 = c^2$$

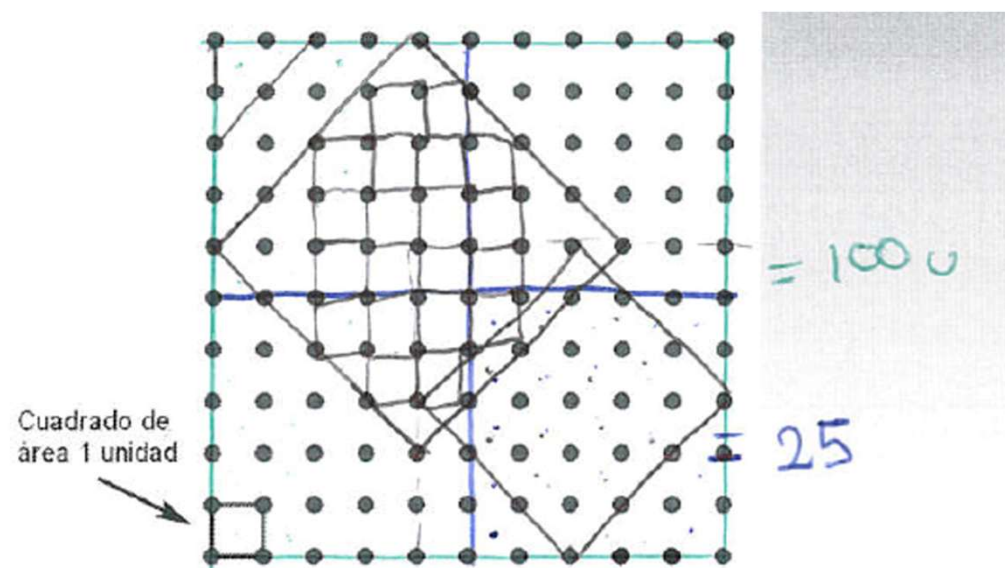
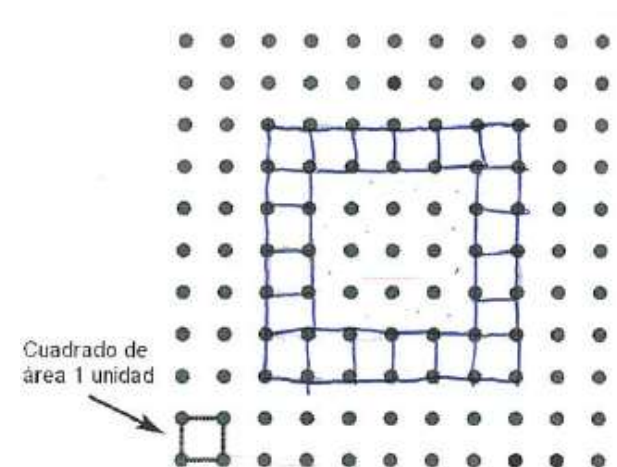
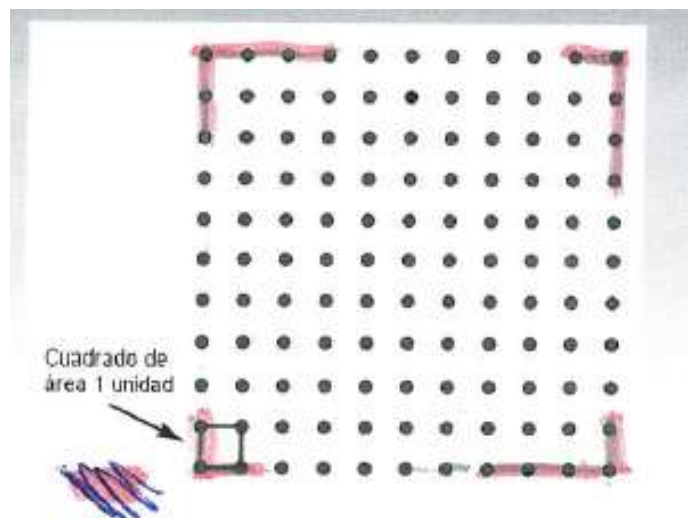
$$1 + 4 = c^2$$

$$5 = c^2$$

$$\sqrt{5} = c$$

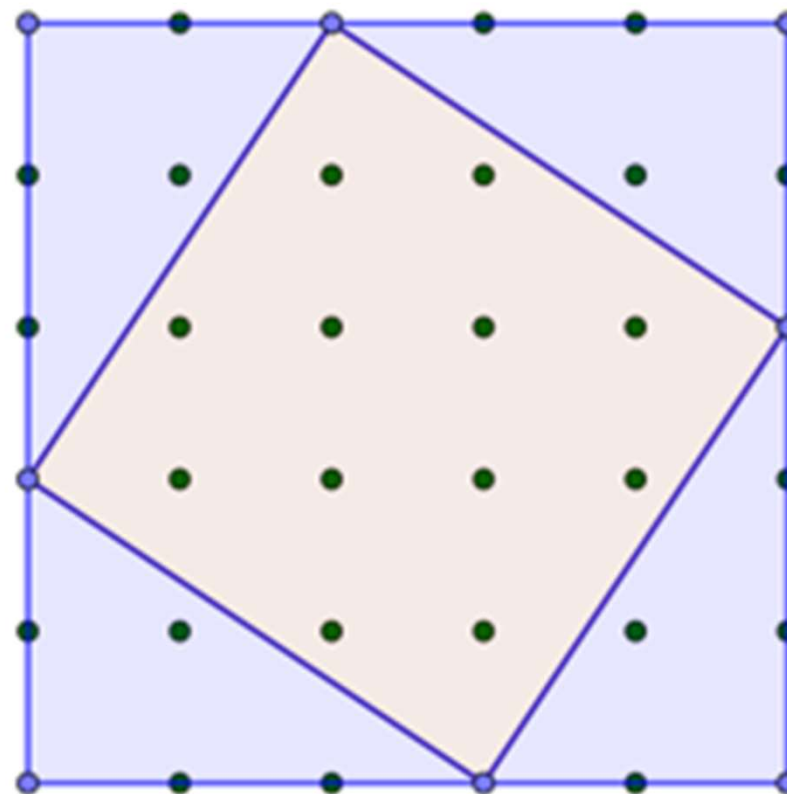
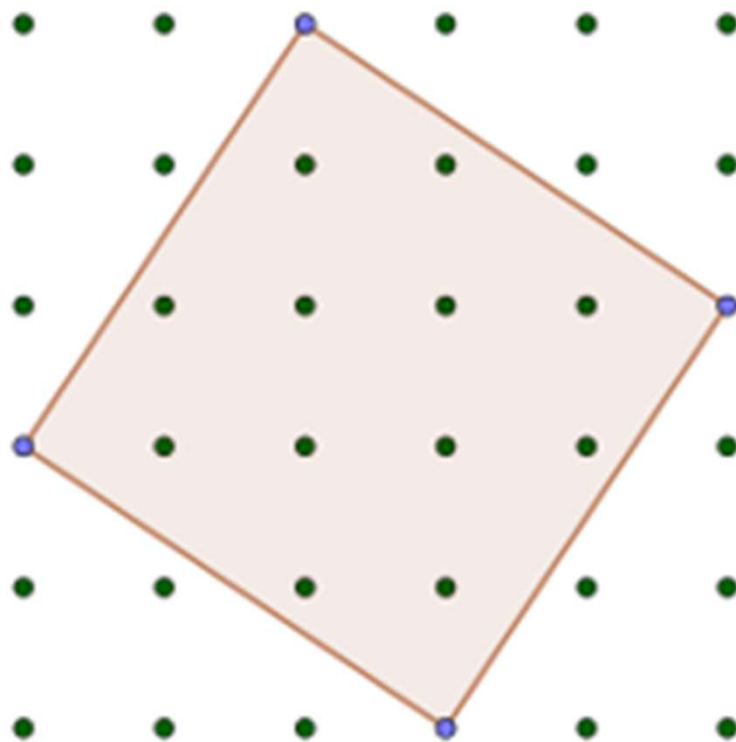


XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



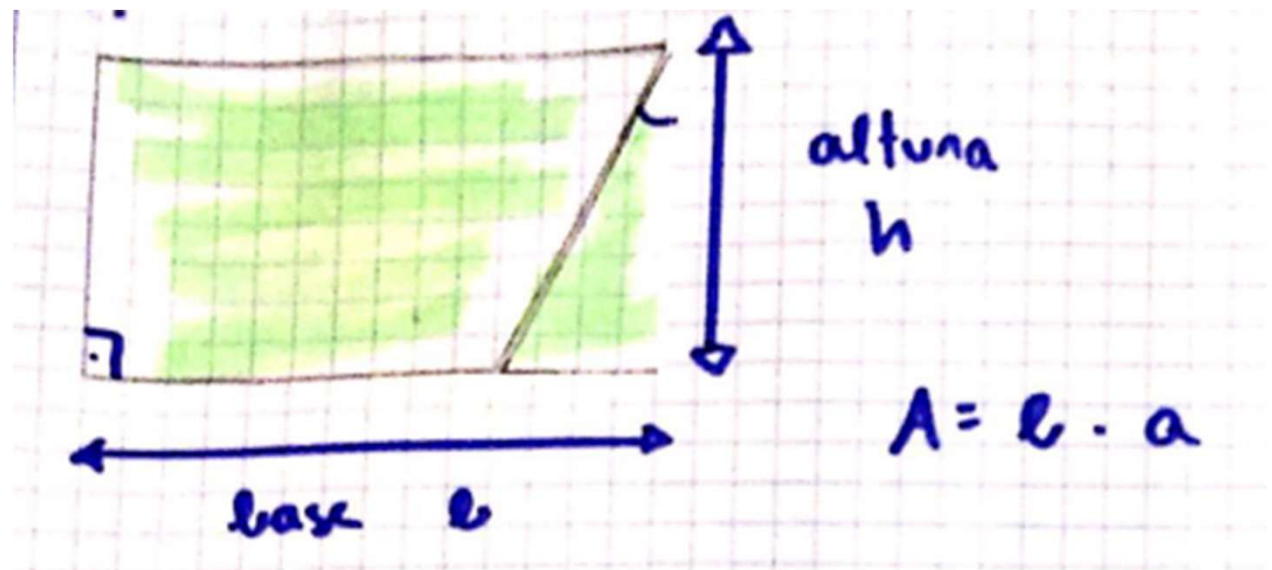
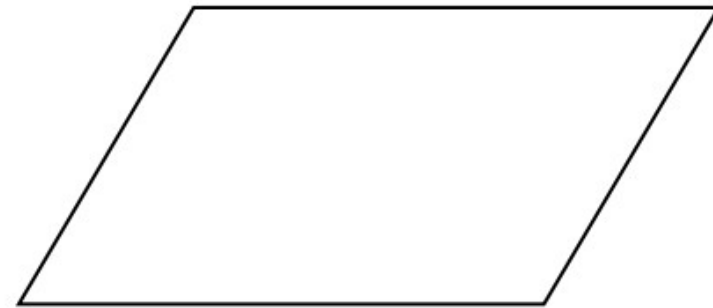
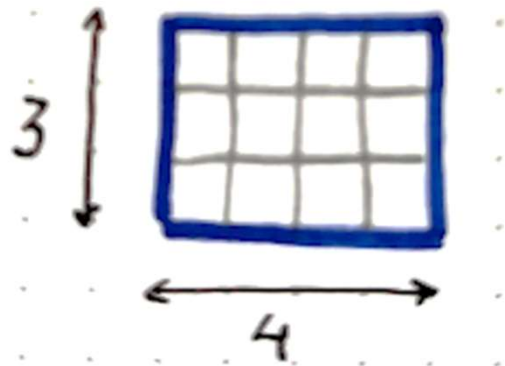


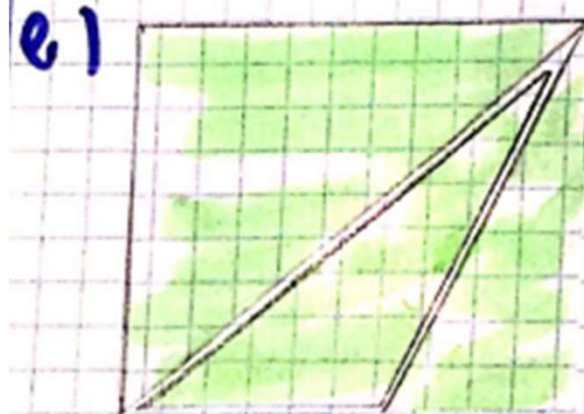
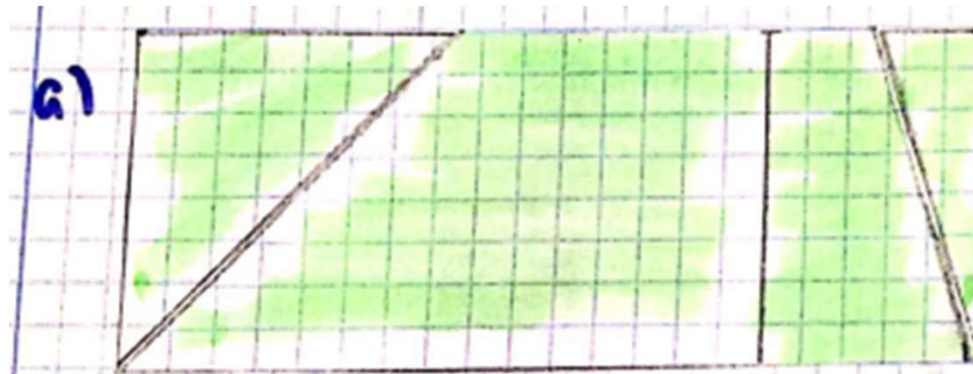
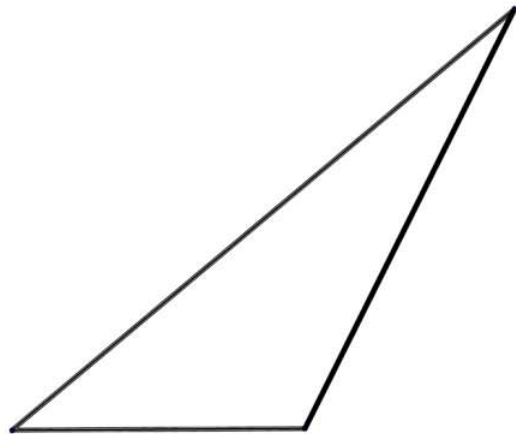
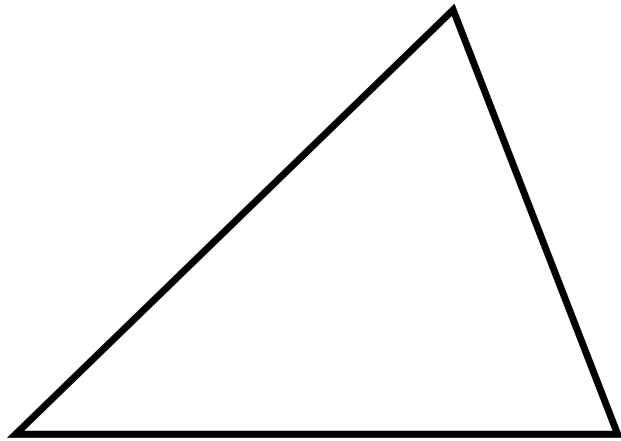
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



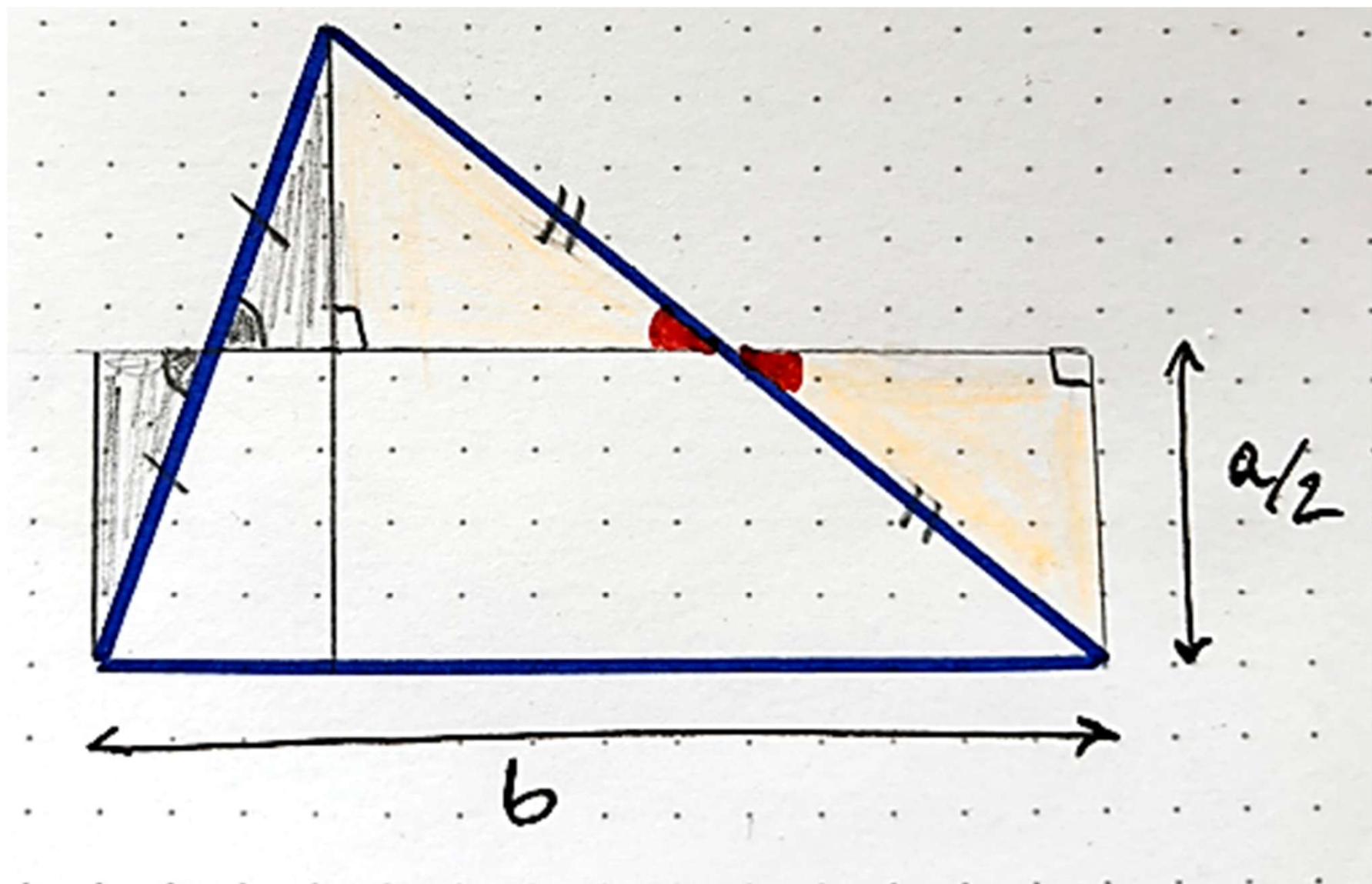
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Fórmulas Generalización del cálculo de áreas

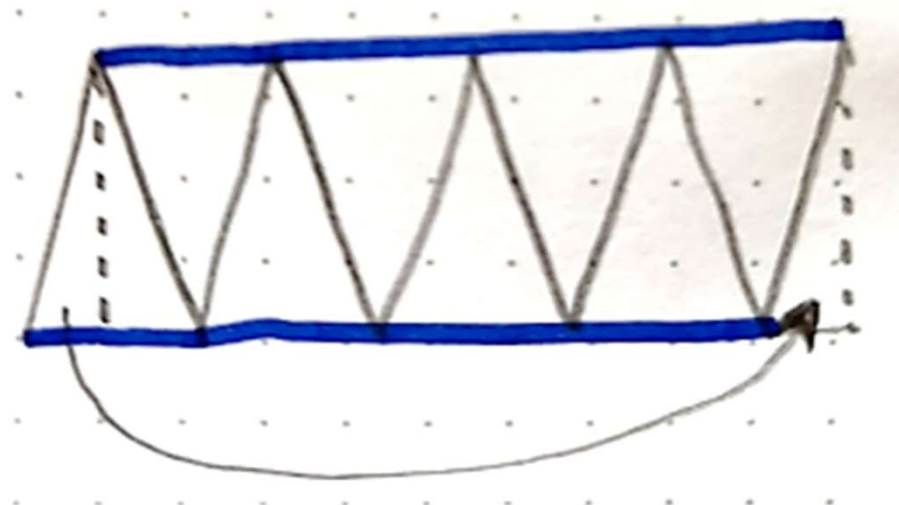




$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$



Fórmulas Generalización del cálculo de áreas



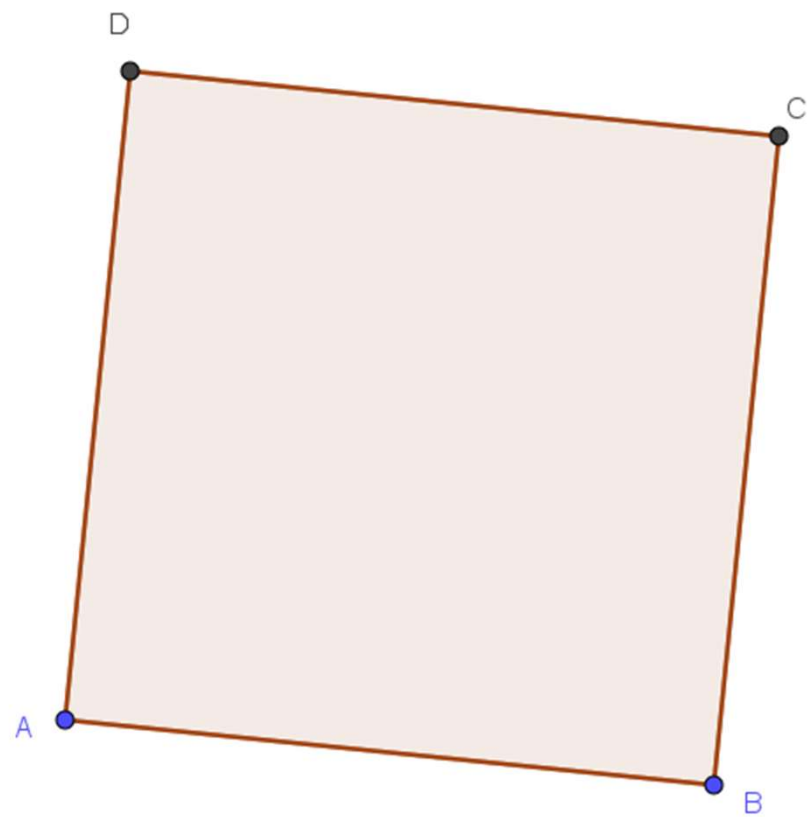
$$A = 4 \cdot l \cdot a \qquad A = \frac{P}{2} \cdot a$$

Fórmulas Generalización del cálculo de áreas

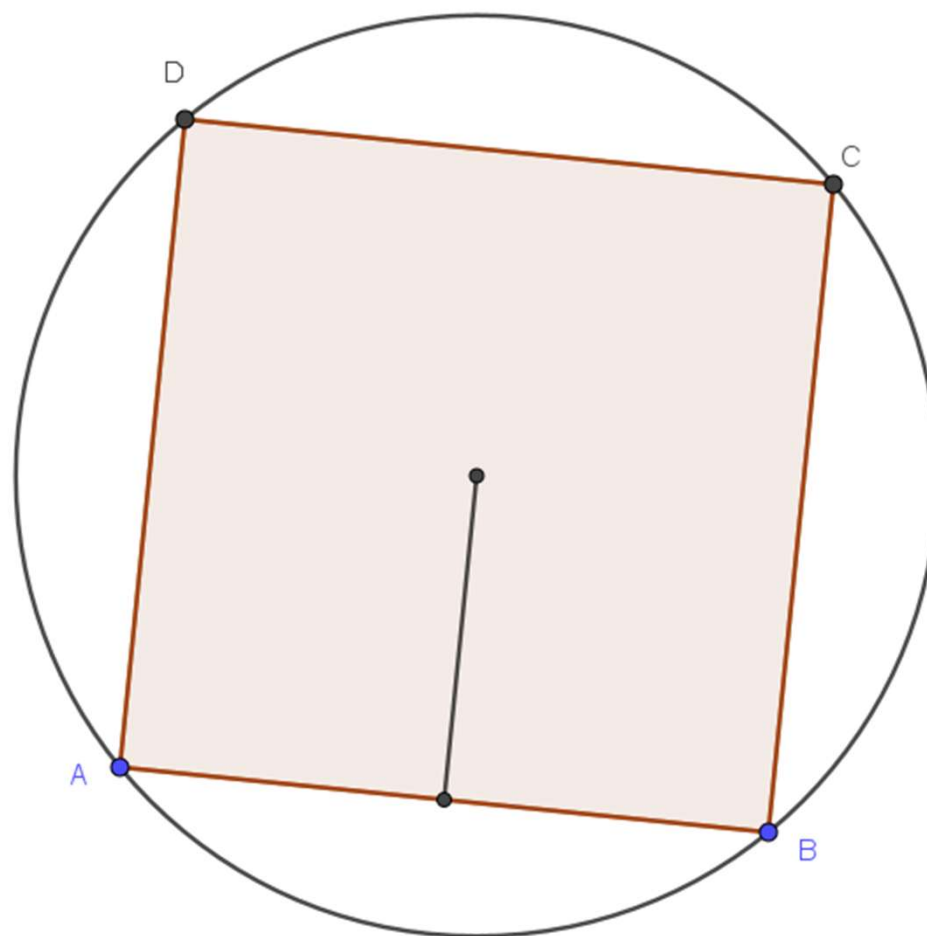
$$A = \frac{P}{2} \cdot a$$

¿Vale también para el cuadrado esto del semiperímetro por la apotema?

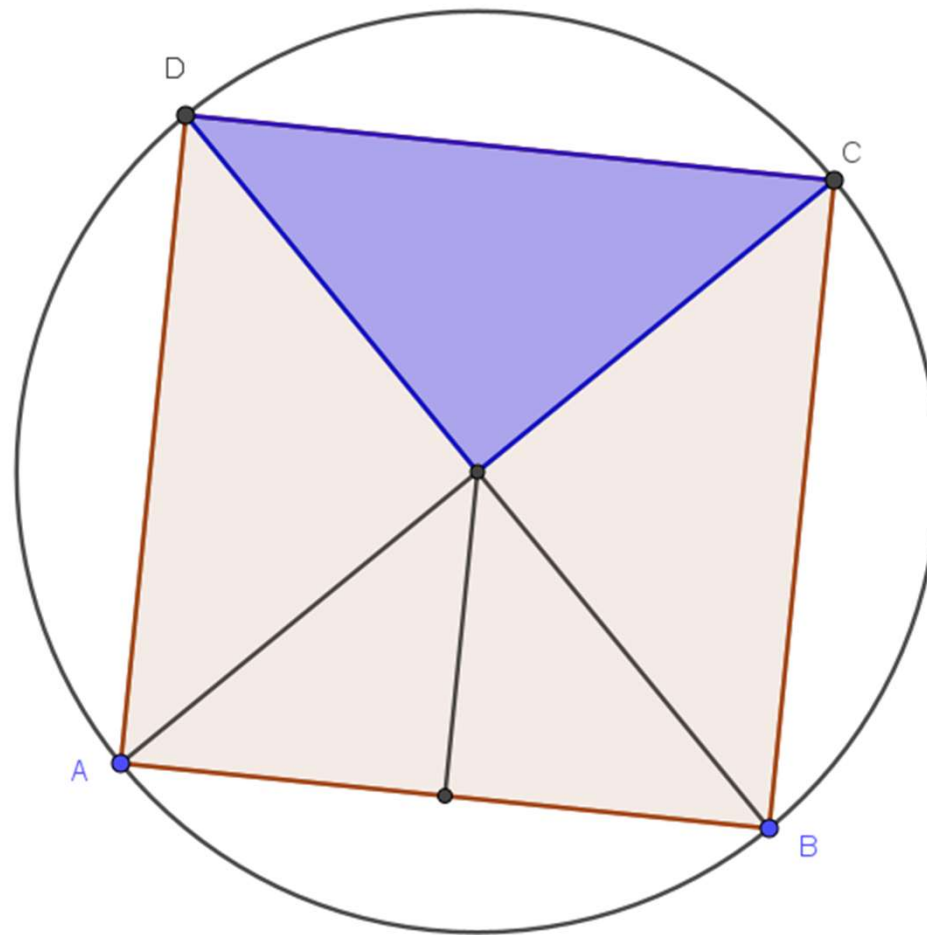
¿Y para el triángulo?



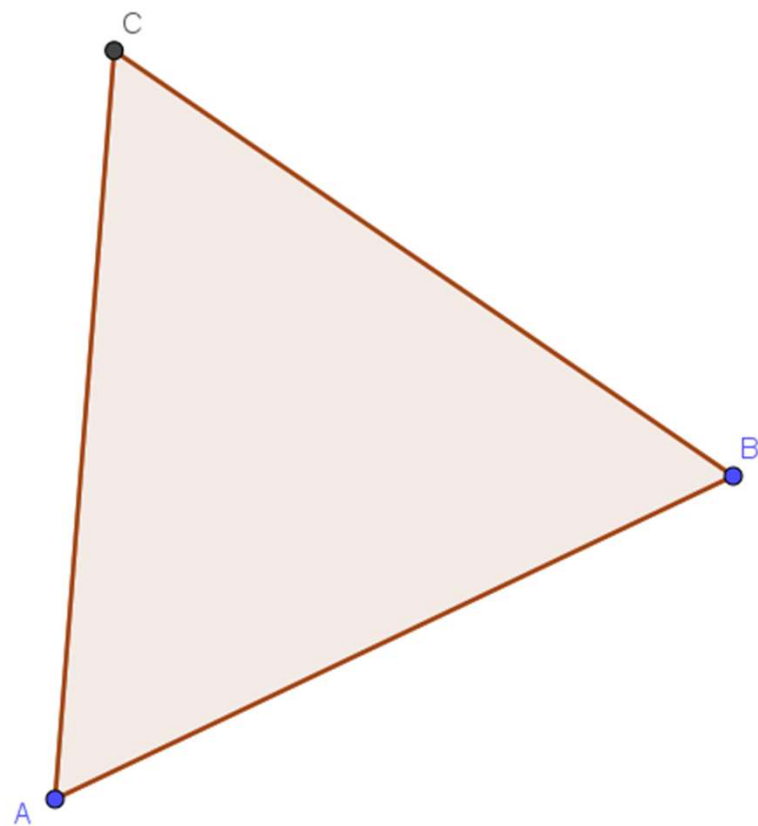
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



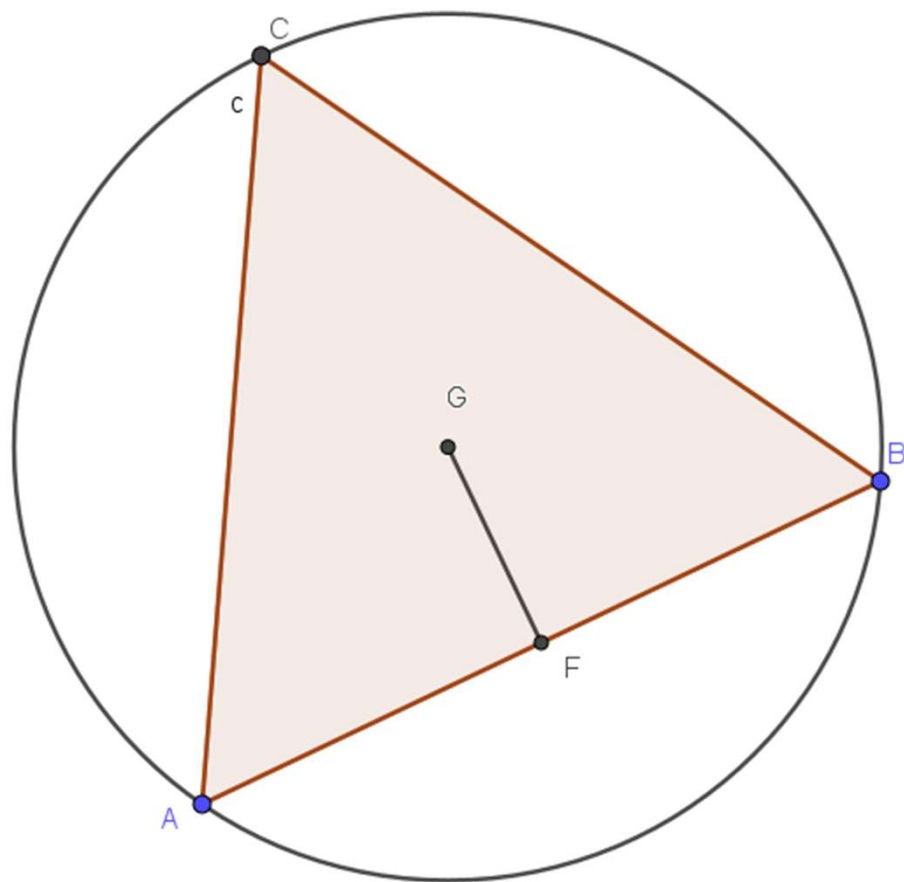
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



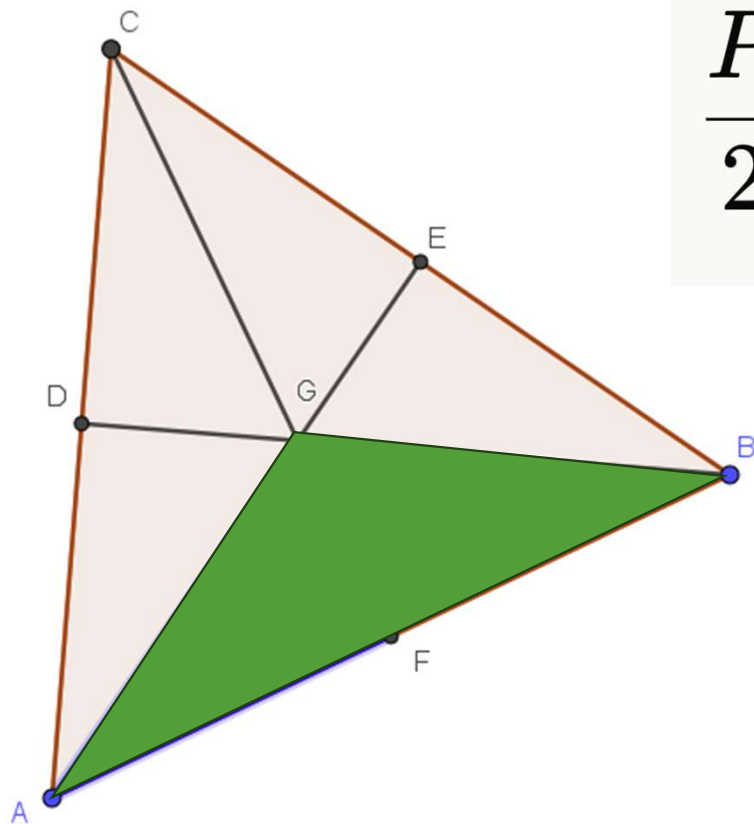
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



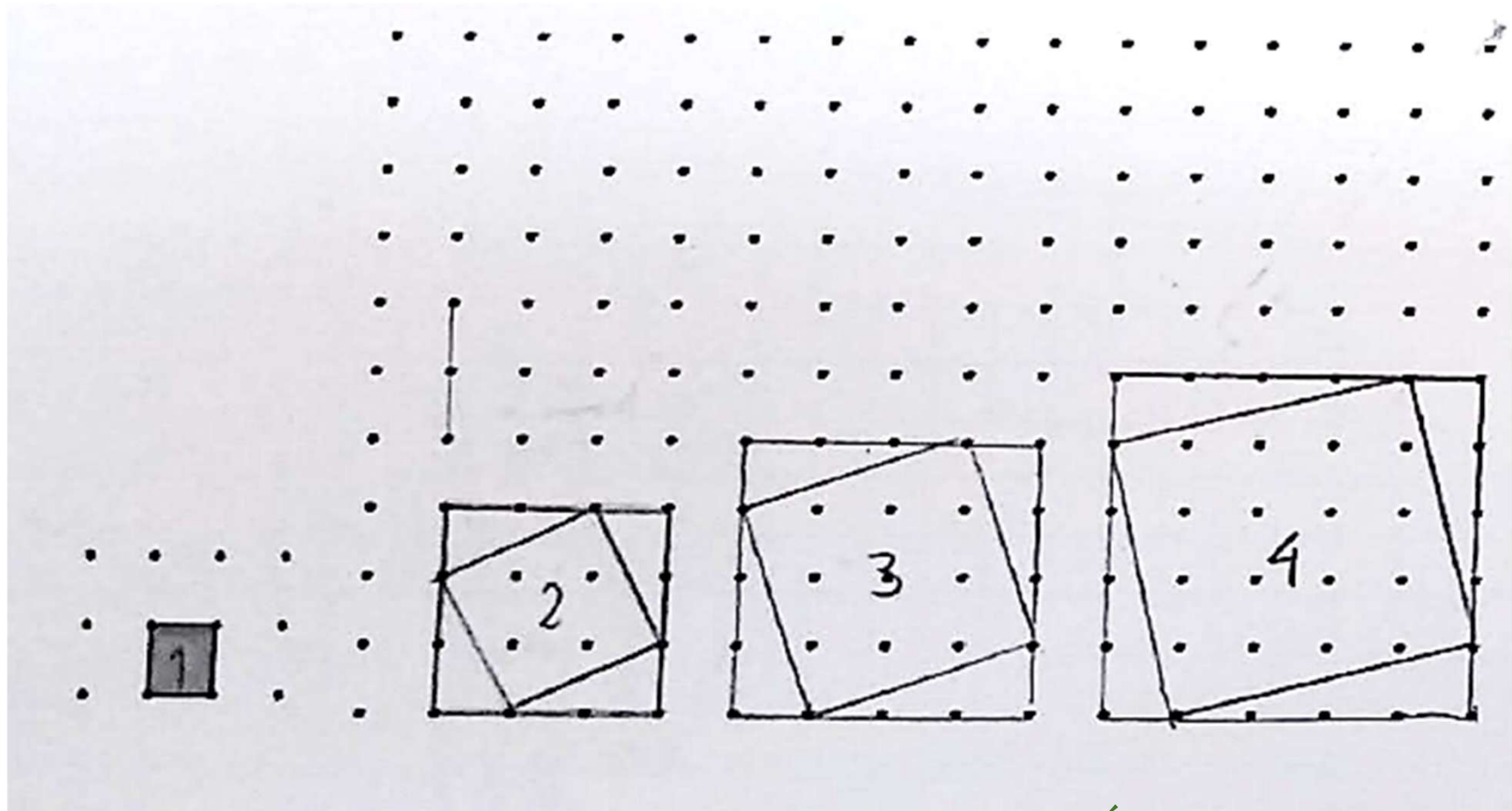
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



$$\frac{P}{2} \cdot a = 3 \cdot \frac{L \cdot a}{2} = \frac{L \cdot h}{2}$$

XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Sobre el teorema de Pitágoras

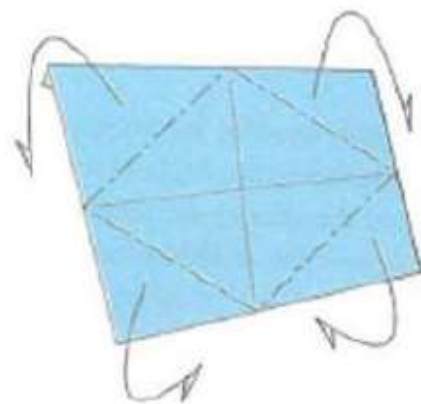
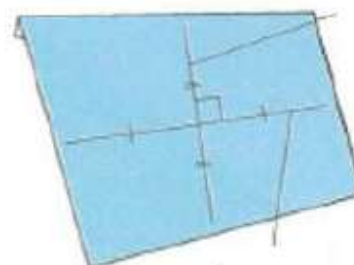
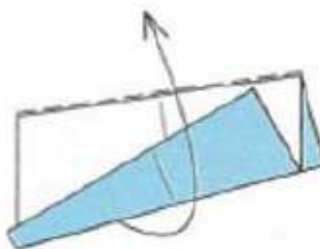
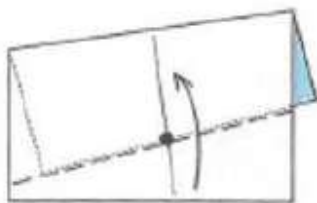
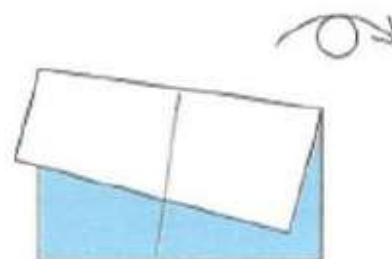
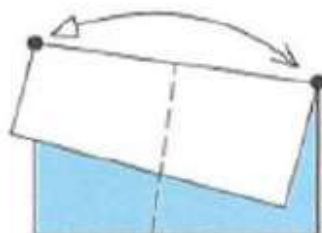


XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Uso de recursos

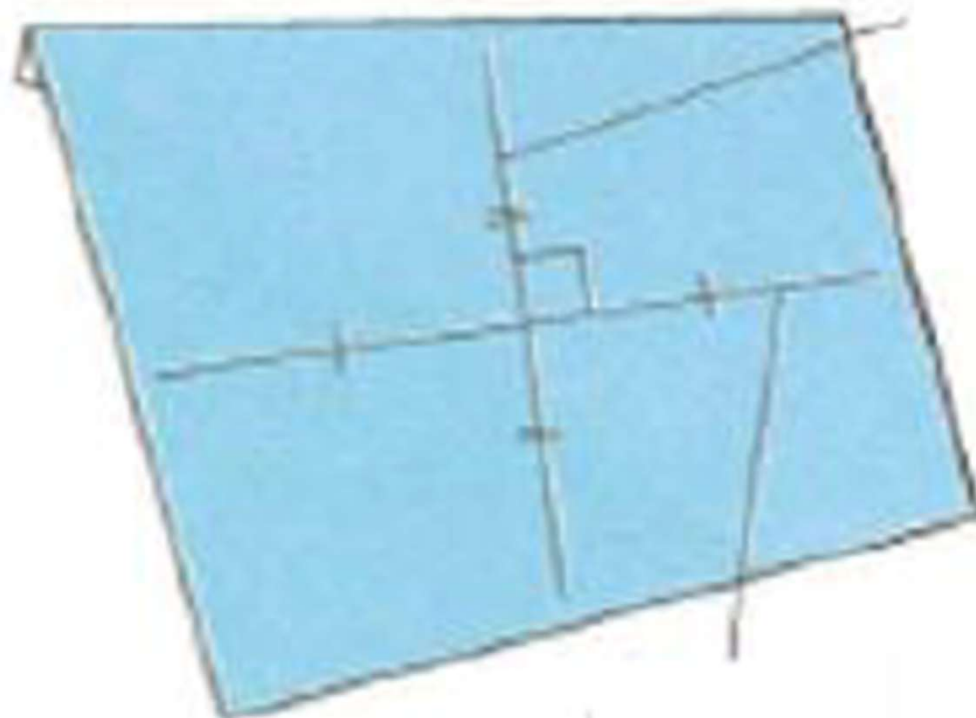


- Si crees que el origami es un recurso anecdótico, o que no hay que manipular, pasa a la última página.
- Si crees que, aunque no se te “da bien,” se puede aprender mucha geometría con origami, pasa a la página siguiente.



Explore Math with Origami

Daniel Scher & Marc Kirschenbaum



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS



RADIOTELEVISION ESPAÑOLA
presenta



EL HOMBRE Y LA TIERRA
SERIE FAUNA IBERICA

Algoritmos de las operaciones

A) Si crees que son muy importantes y mucho importantes en 1º y 2º de Primaria, pasa a la página final.



B) Si crees que permiten revisar ideas del sistema decimal posicional y desarrollar el pensamiento computacional, pasa a la página siguiente.

C) Si crees que son obra de Satanás, que no piensa en los niños, pasa a la página...

RESTA CON LLEVADAS

MÉTODO DEL TOBOGÁN

$$\begin{array}{r} \text{du} \\ 53 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$$

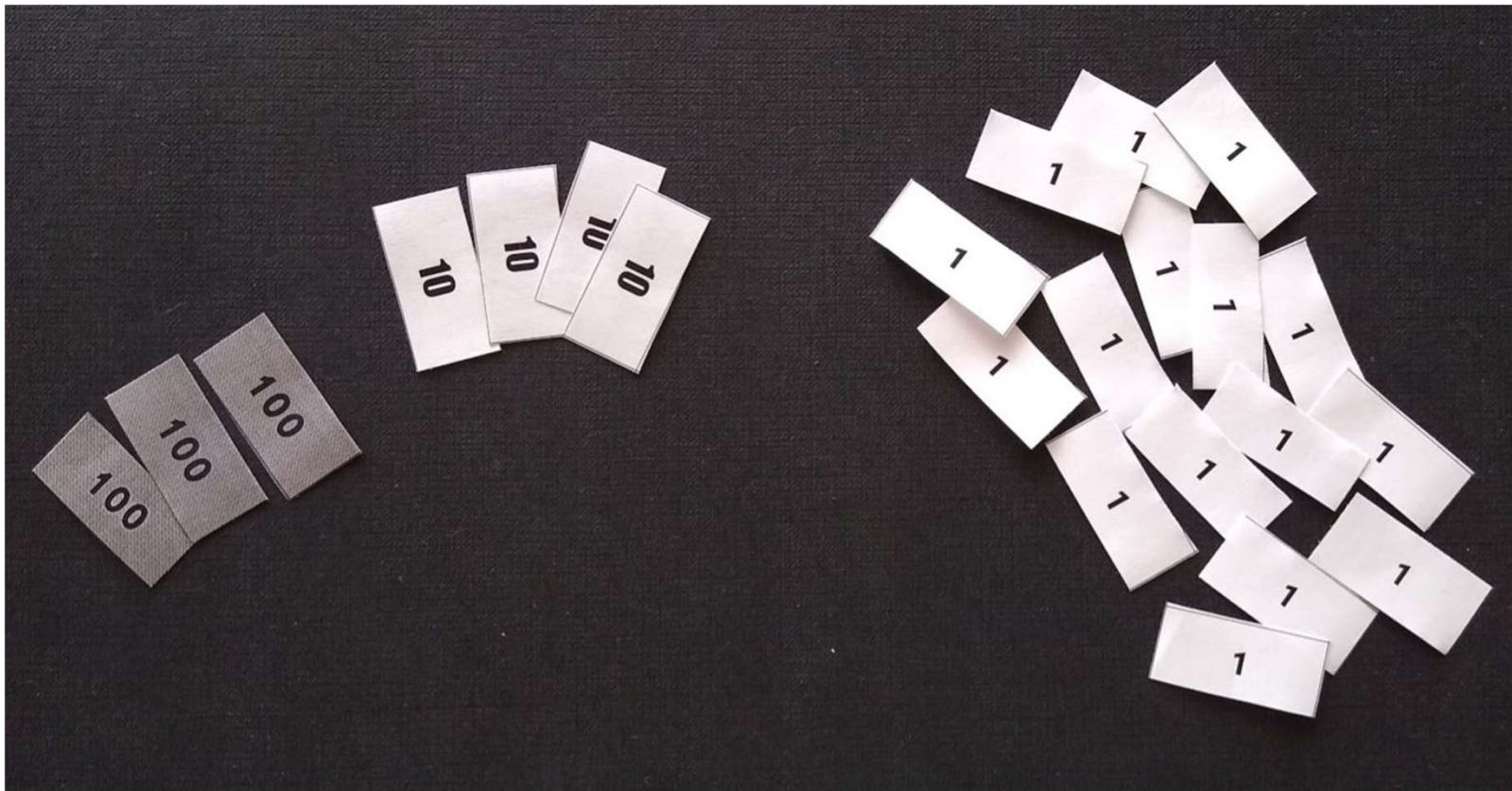


RESTA COMO UN JEDI

XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Con manipulativos...

$$356+878$$



... y con otros objetivos

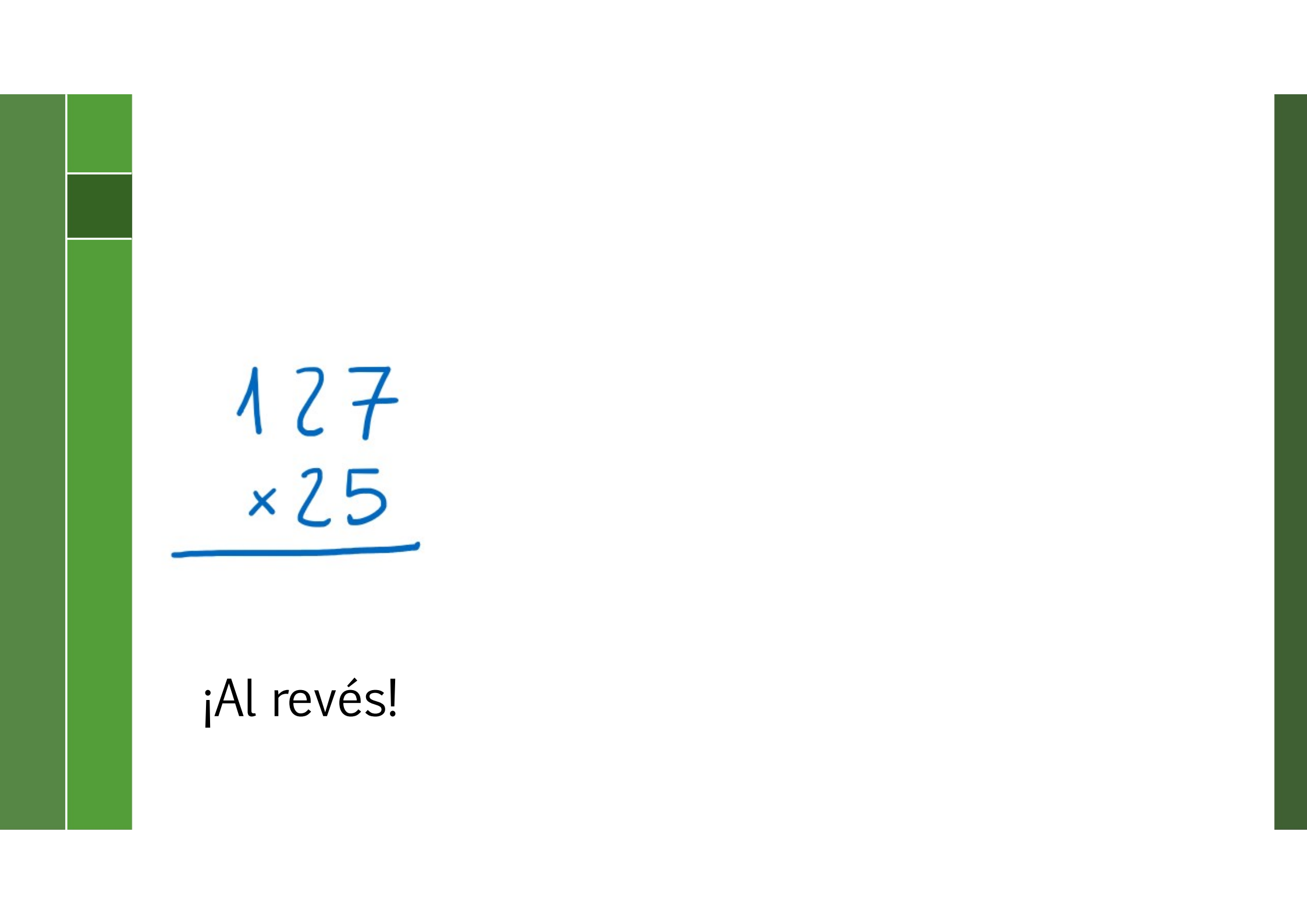
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

¡Al revés!

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

¡Al revés!

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline 16 \\ 56 \\ \hline 216 \end{array}$$


$$\begin{array}{r} 127 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$$

¡Al revés!

$$\begin{array}{r} 127 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$$

¡Al revés!

$$\begin{array}{r} 127 \\ \times 25 \\ \hline 24 \\ 14 \\ \hline 254 \\ \hline \cancel{5} 5 \\ 10 \\ 35 \\ \hline 635 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 254 \\ \hline 3175 \end{array}$$

A curved arrow points from the 635 result of the first calculation to the 3175 result of the second calculation.

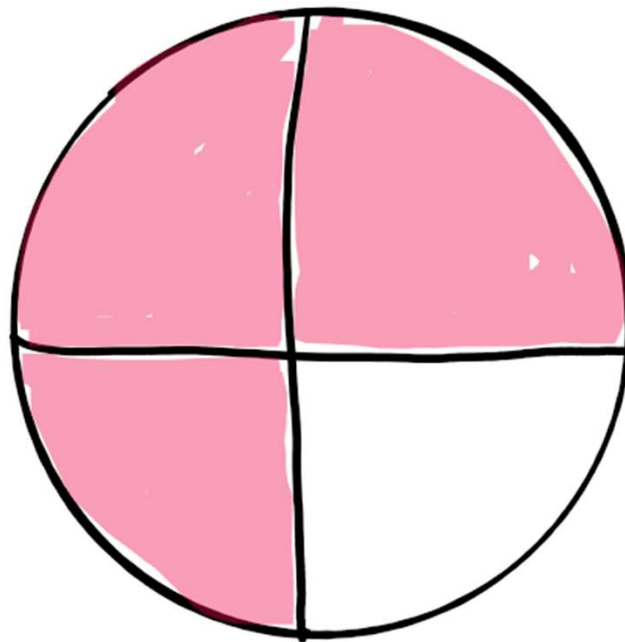


Algoritmos y cosas con fracciones y decimales



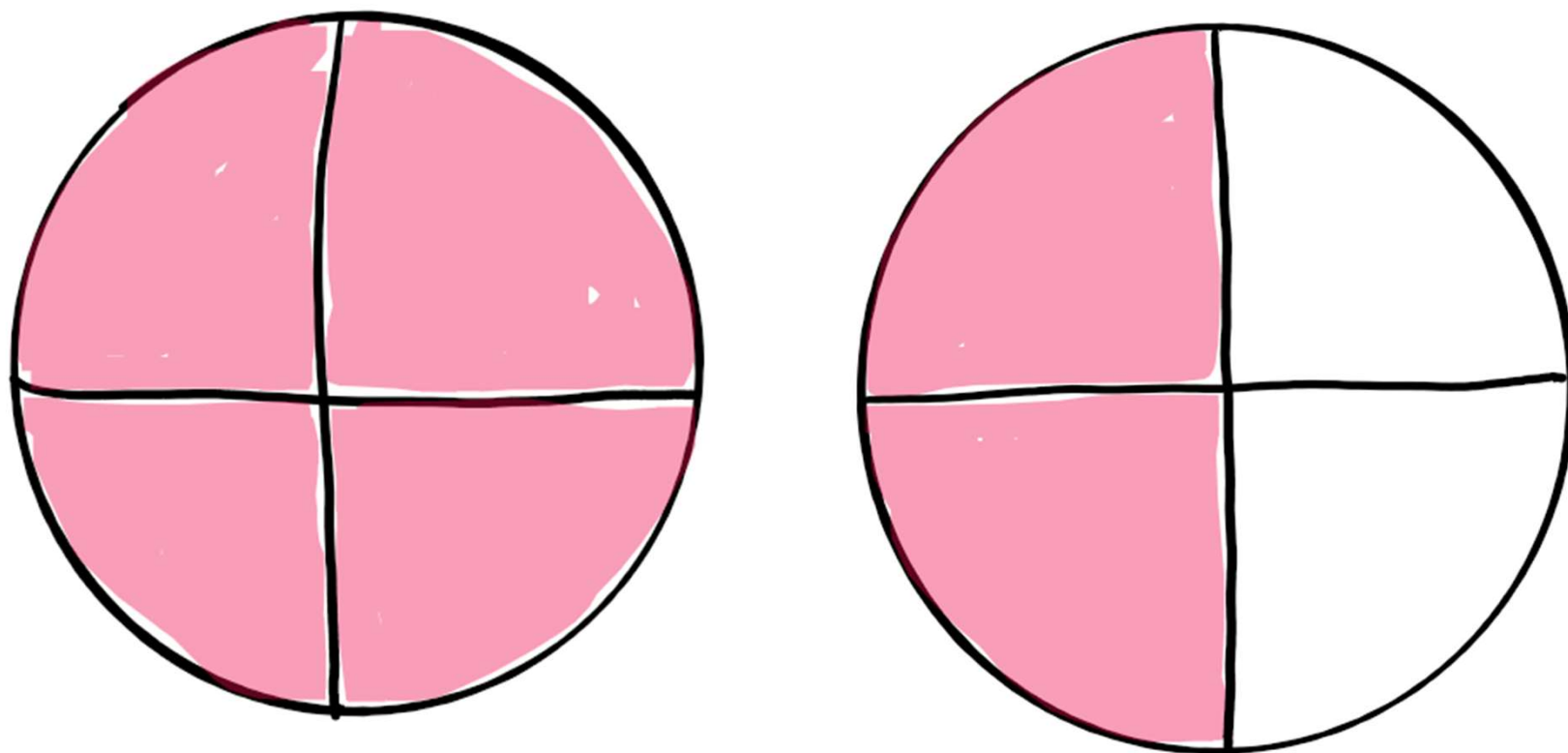
- Si crees que con decimales y fracciones lo que hay que hacer son cuentas cuanto más tochas mejor, pasa a la última página.
- Si crees que son representaciones para conocer más a fondo la naturaleza del número racional, pasa a la página siguiente.

¿Qué fracción se representa aquí?



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

¿Y aquí, qué fracción aparece *representada*?



Fracciones propias



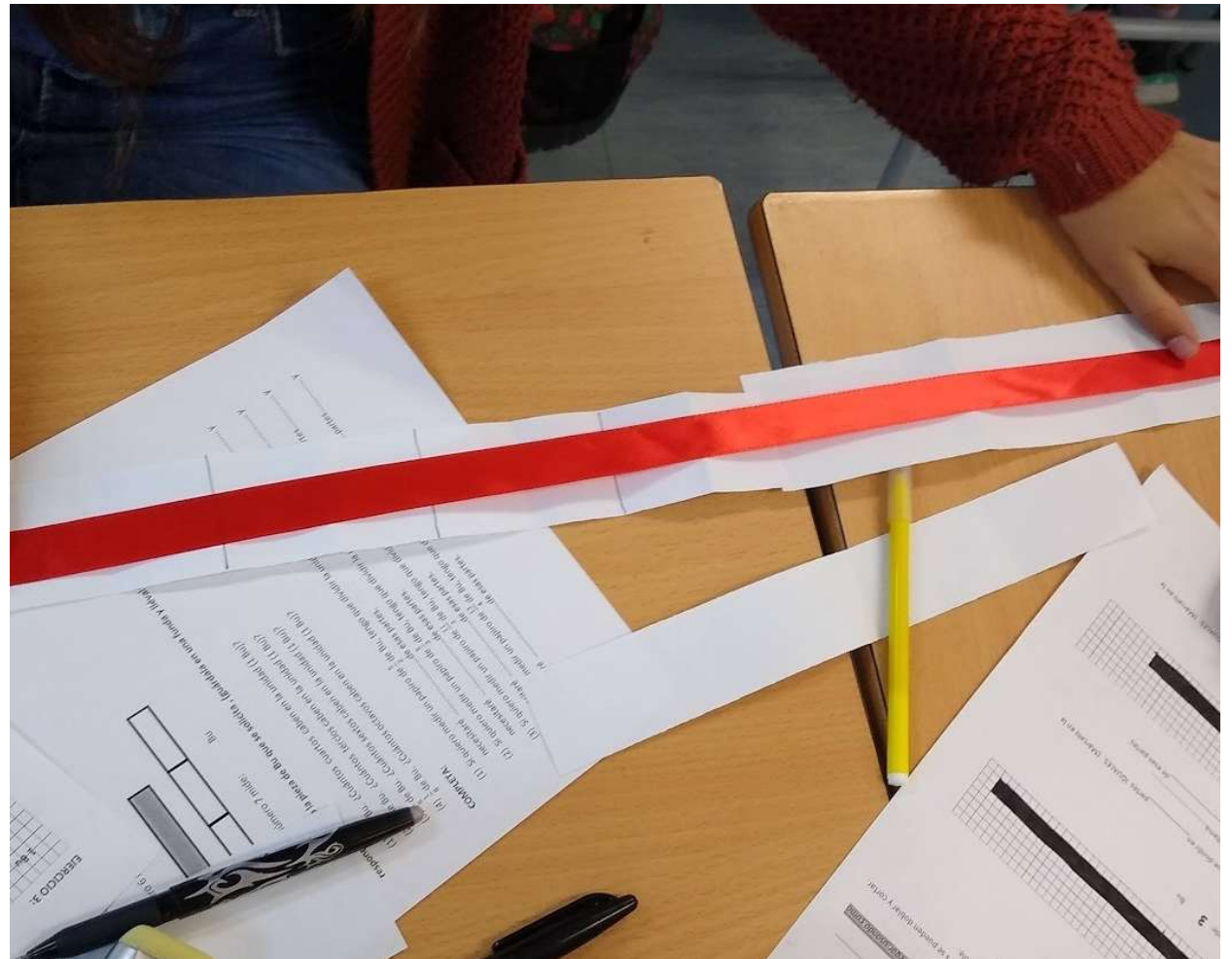
Parte-todo

Fracciones impropias,
algoritmos, propiedades
del racional, $\mathbb{R}$ P, etc.



Parte-todo

¿Por qué no
empezar
midiendo?



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Unidad



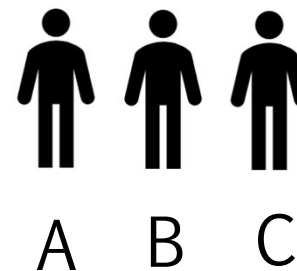
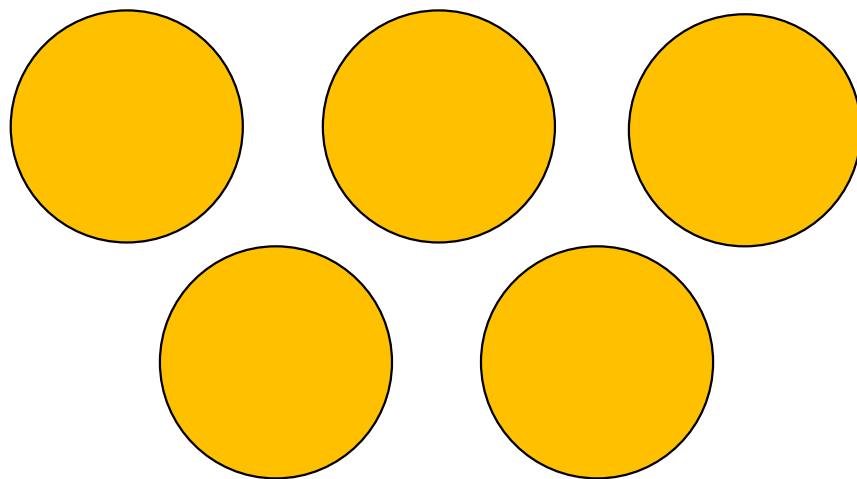
$$\frac{7}{3}$$

Unidad

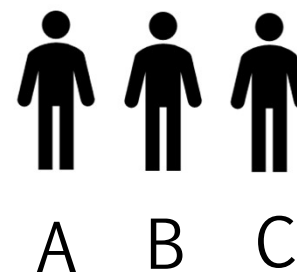
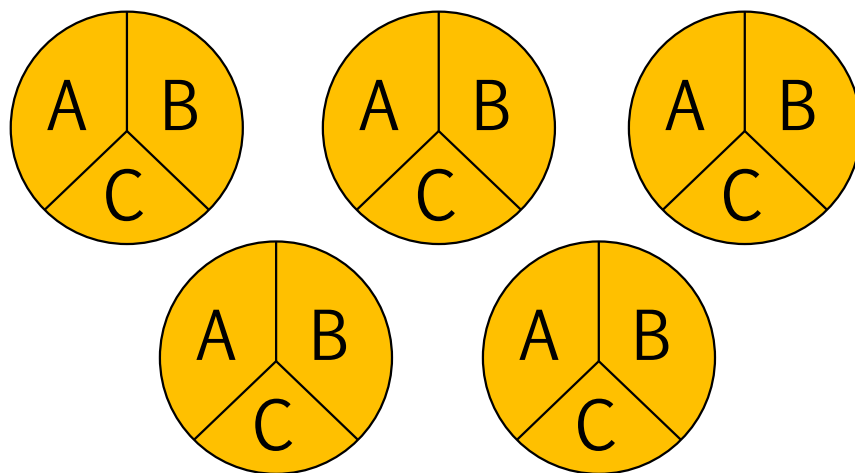


$$\frac{14}{6}$$

Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



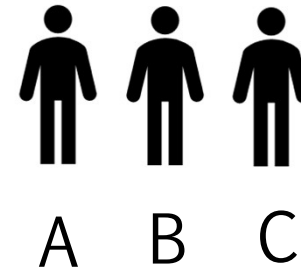
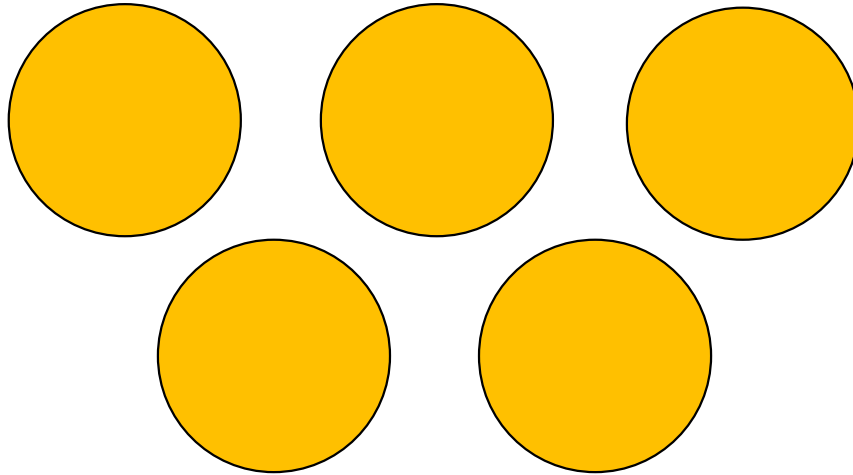
Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	$\frac{1}{3}$	15	5	15	0

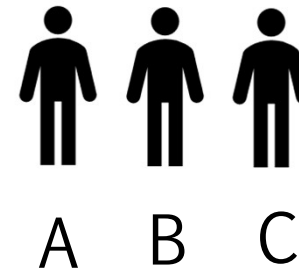
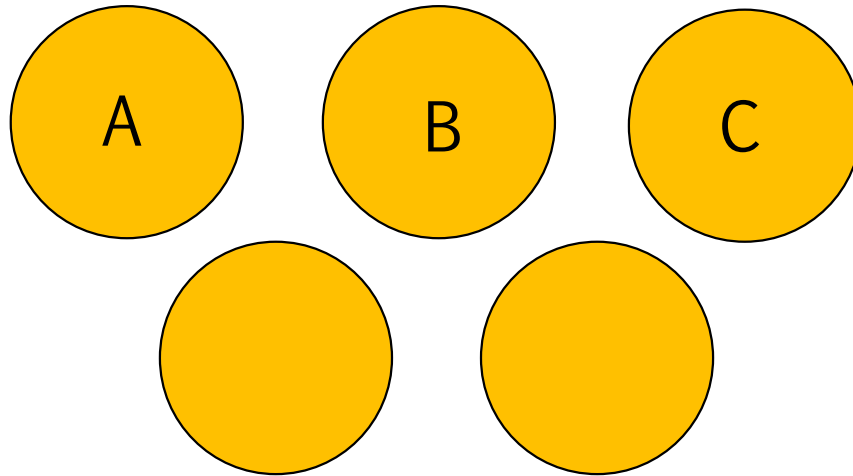
CADA UNO RECIBE $5\frac{1}{3}$ *tortilla*

Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



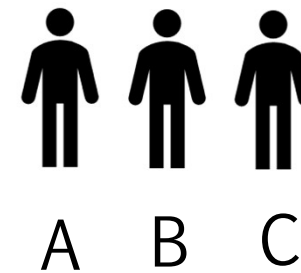
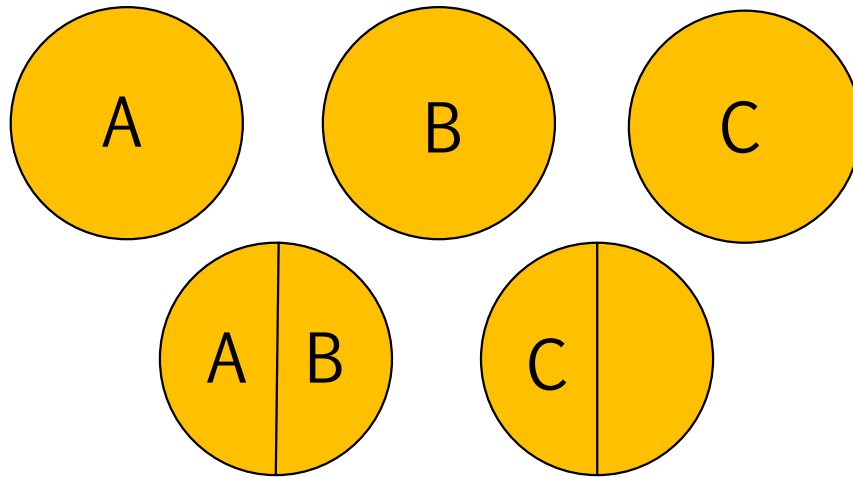
FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra

Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



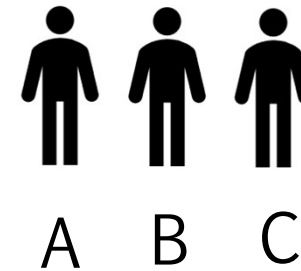
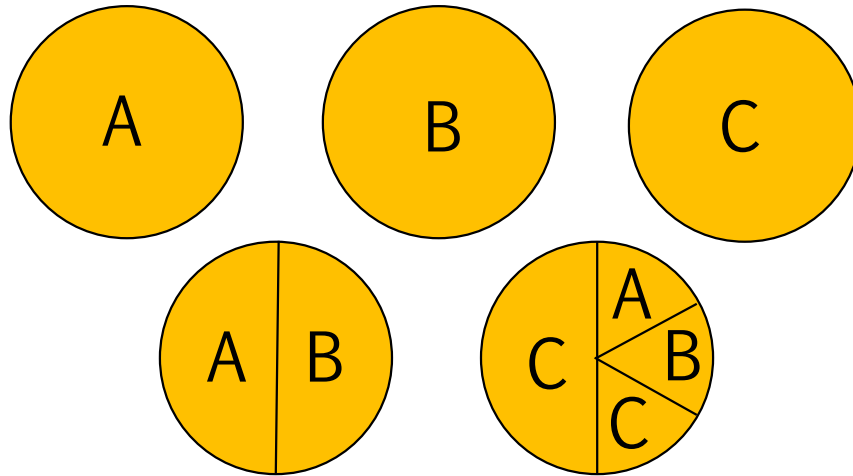
FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	5	1	3	2

Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	1/2	4	1	3	1

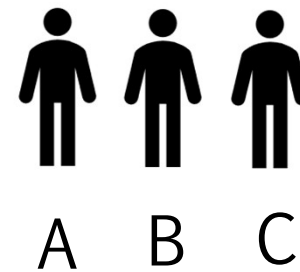
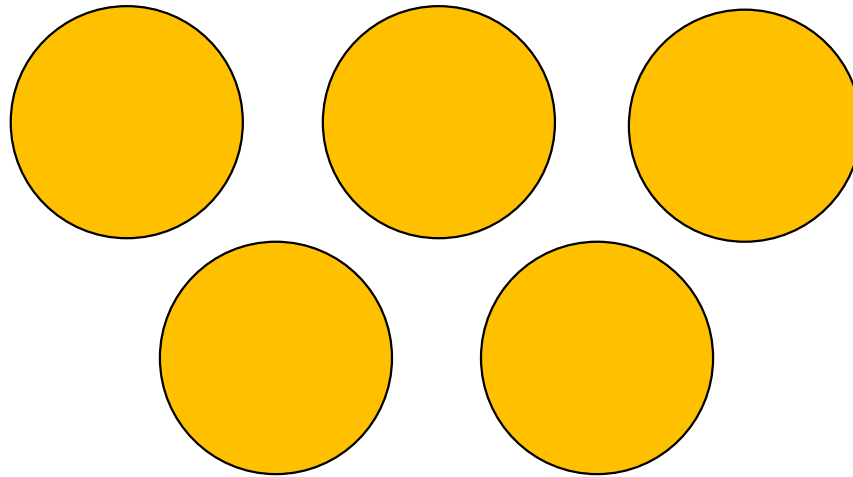
Reparto de 5 tortillas entre 3 personas



FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	1/2	4	1	3	1
3	1/6	3	1	3	0

CADA UNO RECIBE $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ *tortilla*

Reparto "especial" de 5 tortillas entre 3 personas



$n=10$

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	1/10	20	6	18	2
3	1/100	20	6	18	2

Reparto "especial" de 5 tortillas entre 3 personas

Cada uno recibe $1 + 6\frac{1}{10} + 6\frac{1}{10^2} + \dots$ *tortillas*

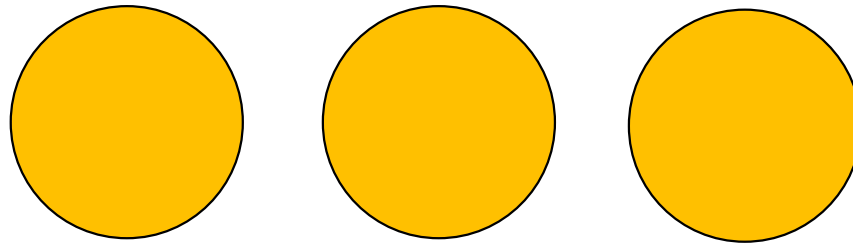
$n=10$

$$\begin{array}{r} 5 \\ - 3 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 1, 6 \dots \end{array}$$

$\frac{1}{10}$ CENTÉSIMAS

Reparto "especial" de 3 tortillas entre 5 personas



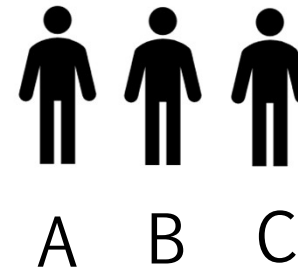
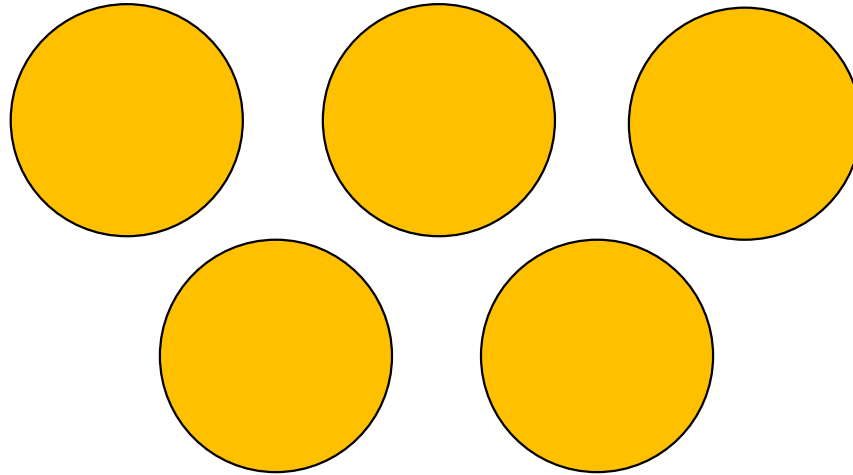
A B C D E

$n=10$

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	3	0	0	3
2	$1/10$	30	6	30	0

Cada uno recibe $6\frac{1}{10}$ *tortillas*

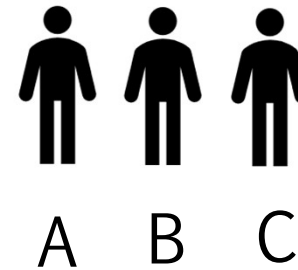
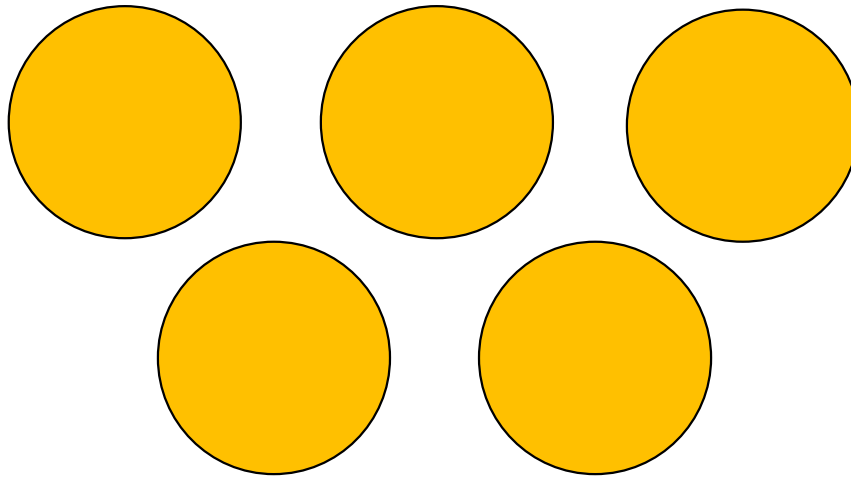
Reparto "especial" de 5 tortillas entre 3 personas



$n=6$

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra

Reparto "especial" de 5 tortillas entre 3 personas

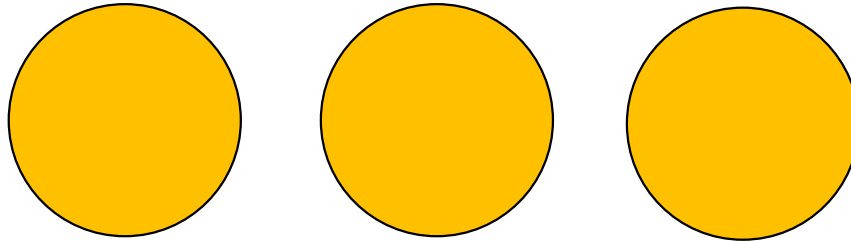


$n=6$

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	5	1	3	2
2	$1/6$	12	4	12	0

Cada uno recibe $1 + 4\frac{1}{6}$ tortillas

Reparto "especial" de 3 tortillas entre 5 personas



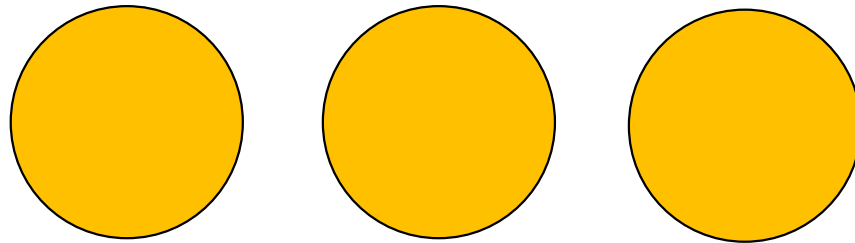
A B C D E



$n=6$

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra

Reparto "especial" de 3 tortillas entre 5 personas

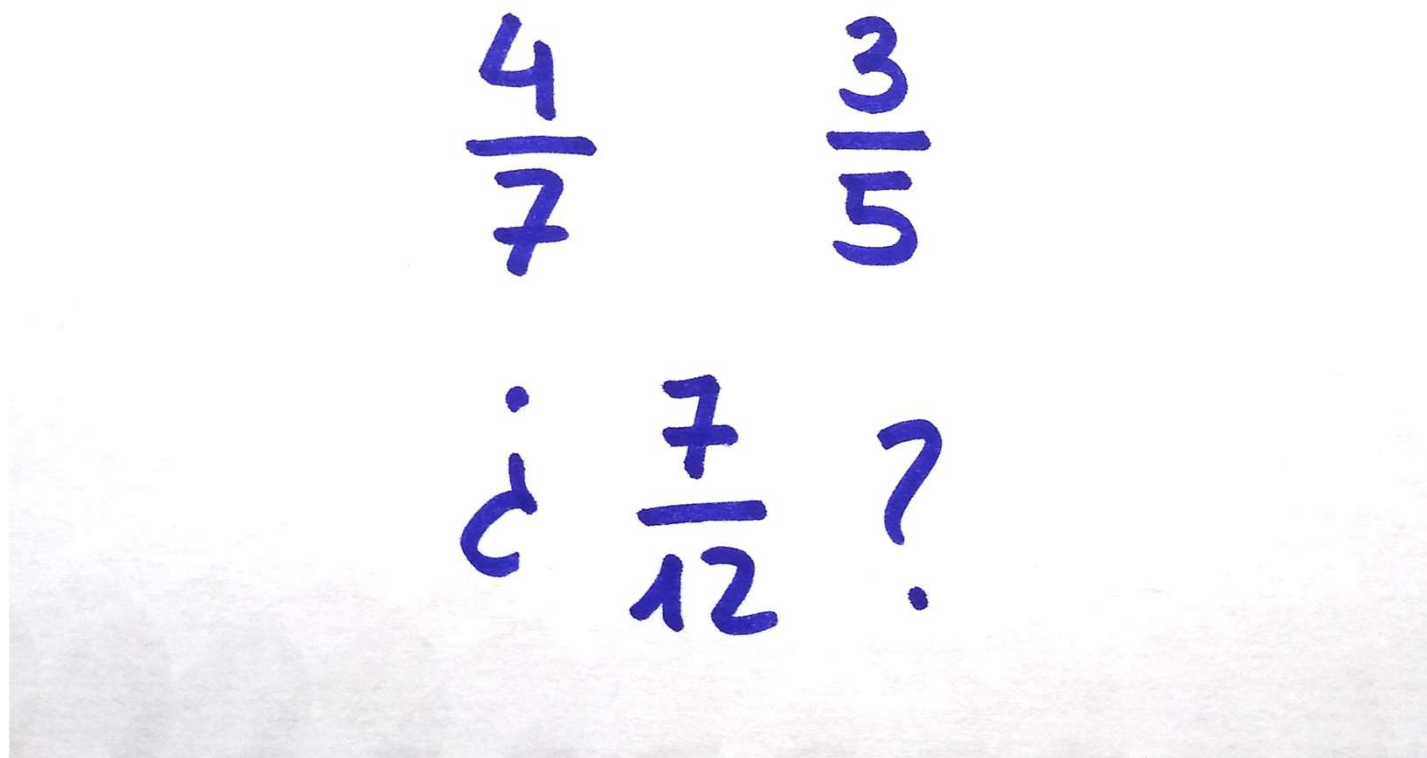


A B C D E n=6

FASE	TAMAÑO	Lo que tengo	Lo que doy a cada	Doy en total	Sobra
1	1	3	0	0	3
2	1/6	18	3	15	3
3	1/36	18	3	15	3

Cada uno recibe $3\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6^2} + \dots$ *tortillas*

Extensiones



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

Uso de recursos



- Si crees que el algoritmo para dividir polinomios es el mismo que el de la caja para números, y que no tienen ni idea, pasa a la página final.
- Si crees que no es el mismo, y que incluso habría que pensar si hay que dividir polinomios y por qué, pasa a la página siguiente.

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \quad \overline{)123} \\ 4 \end{array}$$

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \quad \underline{123} \\ 4 \end{array}$$

✱ Claude

2. Buscamos cuántas veces cabe 123 en 457:

$$123 \times 3 = 369 \quad 123 \times 4 = 492$$

Como $492 > 457$, la cifra que **realmente** cabe es el **3**, no el 4 (con 4 nos pasaríamos, ya que $492 > 457$).

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \\ -492 \\ \hline -35 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{123} \\ 4 \cdot 10 \end{array}$$

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \\ -492 \\ \hline -350+4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{123} \\ 4 \cdot 10 \end{array}$$

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \\ -492 \\ \hline -350+4 \\ -346 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 123 \\ \hline 4 \cdot 10 \end{array}$$

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

$$\begin{array}{r} 4574 \\ -492 \\ \hline -350+4 \\ -346 \\ -369 \\ \hline 23 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 123 \\ \hline 4 \cdot 10 - 3 \cdot 1 \end{array}$$

Algoritmos para dividir ¿cualquier cosa?

Termina la división sin modificar que la primera cifra del cociente es 4.

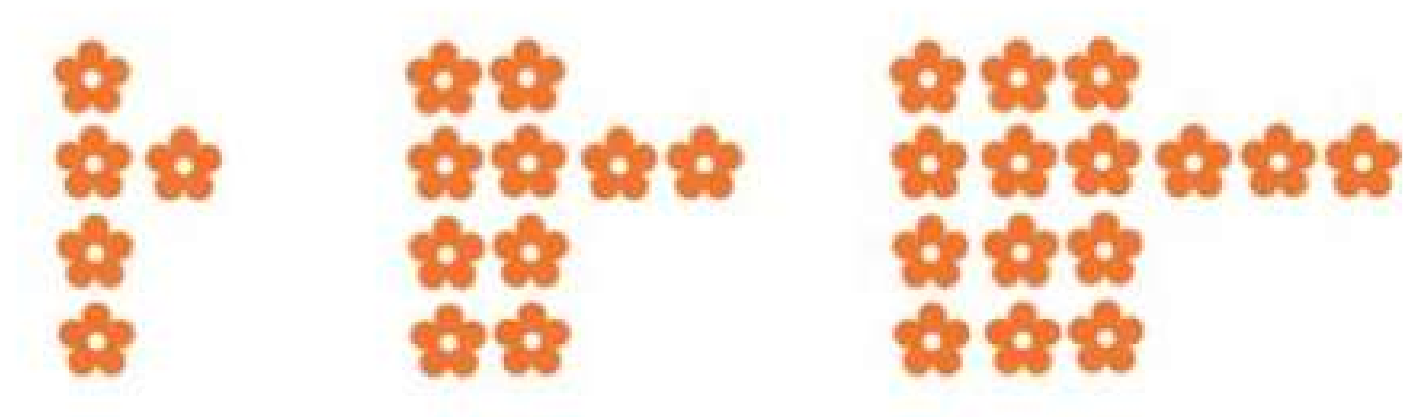
$$\begin{array}{r} 4574 \\ - 492 \\ \hline - 350 + 4 \\ - 346 \\ - 369 \\ \hline 23 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{123} \\ 4 \cdot 10 - 3 \cdot 1 \end{array}$$

$$4574 = (4 \cdot 10 - 3 \cdot 1) \cdot 123 + 23$$

Muy bonito, pero tengo un “temario” que “dar”



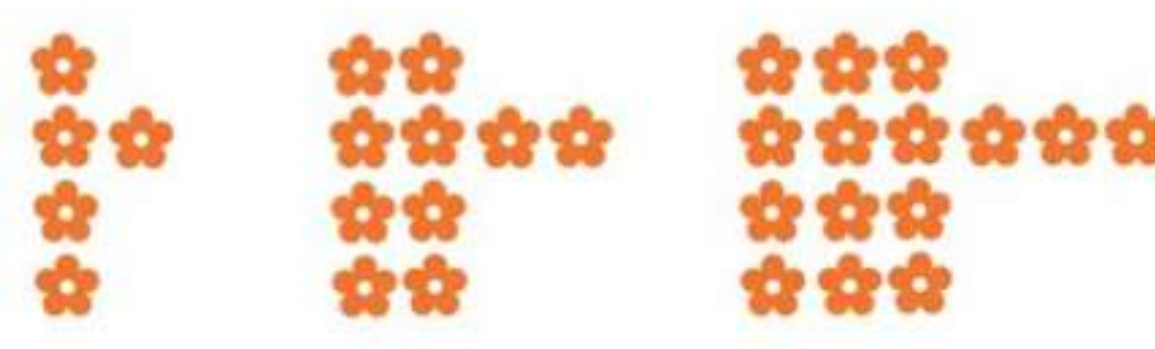
- Si crees que todo esto está muy bien, pero que no da tiempo, pasa a la última página.
- Si piensas que, si me lo está preguntando, por algo será, pasa a la página siguiente.



<https://www.visualpatterns.org/>

XXII JAEM - Un viaje al interior de las matemáticas

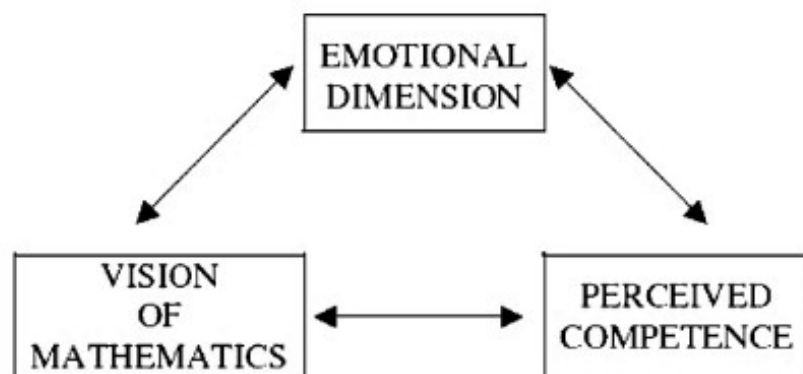
¿ $4x+x$ es lo mismo que $5x$?



<https://tierradenumeros.com/post/hilo-enfoques-algebra-monomios-por-ahi-no-es/>

¿Merece la pena si al curso que viene...?

Se ha investigado con un grupo al pasar de 3º a 4º y de 4º a 5º curso de Primaria (8-9 y 9-10 años).



Di Martino y Zan (2010)

Evolución de la actitud hacia las matemáticas de alumnado de primaria tras cambios en la cultura de aula

Evolution of primary school students' attitudes toward mathematics following changes in classroom culture

Sergio Martínez-Juste

Universidad de Zaragoza, <https://orcid.org/0000-0002-2607-6789>

Pablo Beltrán-Pellicer

Universidad de Zaragoza, <https://orcid.org/0000-0002-1275-9976>

Manuel Jesús Siaba-Lestón

CEIP Plurilingüe Ricardo Tobío, Esteiro-Muros, <https://orcid.org/0009-0009-8926-5198>

Gregorio Morales-Ordóñez

IES Marjana, Chiva, <https://orcid.org/0000-0002-2607-6789>

Vuelta a un enfoque expositivo o instrumental

«Este año las mates son muy distintas trabajamos individual, no hacemos problemas, son más aburridas porque la mayoría de las veces hacemos cuentas. Este año las matemáticas también me parecen más fáciles porque los problemas son una payasada y las divisiones y eso las hago desde 1º. Lo más divertido me parecen los juegos en los que hay que pensar, pero hacemos muy pocos. En lo que más nos centramos es en el cálculo y hacemos problemas difíciles una vez. Cuando hacemos matemáticas a veces me aburro.»

Final instrumental
Años más tarde, las matemáticas en Infantil y Primaria se han reducido a lo “básico”, mientras que en Secundaria han terminado siendo una asignatura optativa.



Elige tu propia aventura

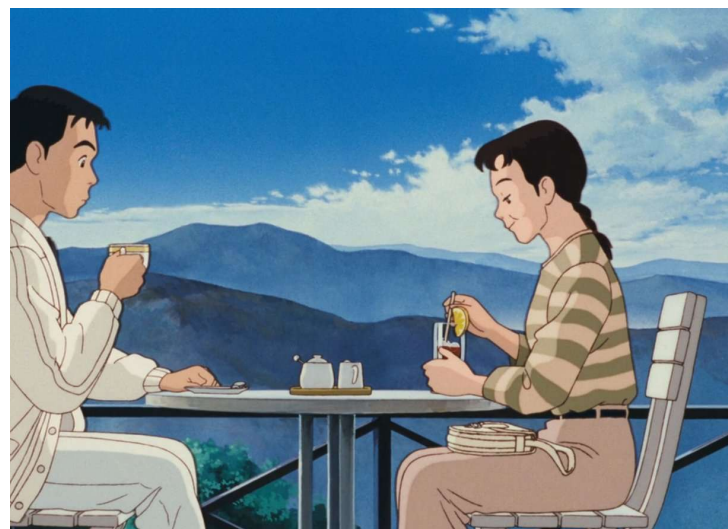
Las matemáticas se enseñan como un tesoro a visitar. La secundaria tradicional no busca crear usuarios competentes de esos tesoros, sino admiradores apaciguados y olvidadizos. Esto ocasiona que una mayoría de estudiantes sienten que lo enseñado no es para ellos.

Yves Chevallard



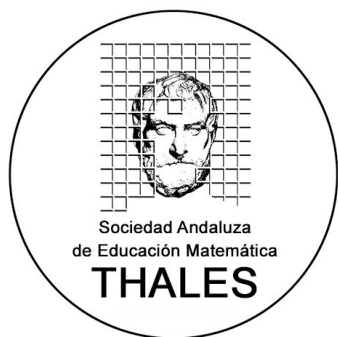
XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

El final que yo quiero...



XXII JAEM - UN VIAJE AL INTERIOR DE LAS MATEMÁTICAS

ELIGE
TU PROPIA
AVENTURA



Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza



Universidad
Zaragoza



@pbeltranp
www.tierradenumeros.com

